

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ APPROFONDIE

Application de la théorie des limites de graphes aux systèmes dynamiques sur réseau de réaction-diffusion et instabilité de Turing

Bellière, Alice

Award date:
2019

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

Application de la théorie des limites de graphes aux systèmes dynamiques sur réseau de type réaction-diffusion et instabilité de Turing

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « **sciences mathématiques, à finalité approfondie** »

Promoteur : Timotéo Carletti

Encadrant : Julien Petit

Alice BELLIERE

Juin 2019

Remerciements

Nous voudrions remercier en premier lieu Julien sans qui ce mémoire n'aurait été le même. Nous ne comptons plus les heures dans son bureau à répondre à nos interrogations, à parler des prochaines tâches et à fouiller dans des livres et articles à la recherche de réponses. Merci pour sa présence, son aide sans relâche, sa patience et son partage de passion.

Merci également à Mr Carletti pour sa supervision, son regard critique et sa disponibilité. Un merci tout particulier pour ses conseils d'écriture et sa curiosité menant à des conversations fructueuses.

Nous remercions l'ensemble du corps universitaire, professeurs et assistants, pour leur partage de connaissance, l'apprentissage de la rigueur mathématique et des liens innombrables entre les cours, l'éveil de notre curiosité et leur disponibilité pour les questions et discussions diverses.

Nous aimerions finir par remercier notre famille, amis proches, voire très proches, pour les nombreux encouragements à avancer, nous dépasser mais aussi oser, leur bienveillance, leur aide, leur écoute et leur compréhension. Merci aussi pour les distractions qui nous ont fait beaucoup de bien : les promenades, les soirées TV, les livres, les visites, les gourmandises, les rituels de cadeau et j'en passe.

Résumé

Étudier un réseau et la dynamique qui opère sur celui-ci possède un grand intérêt puisque les processus rencontrés dans la nature ou les technologies peuvent souvent être modélisés aux moyens d'un réseau. Cependant, la complexité de tels réseaux, qui sont de plus en plus grands, empêche encore à ce jour d'obtenir certaines réponses. Nous inscrivons notre recherche dans la théorie des graphons qui définit un objet limite conservant en mémoire la structure du réseau. Nous appliquons cette théorie au cas de dynamique de réaction-diffusion incluant des cas d'instabilité de Turing, où l'équilibre stable de la réaction est instable pour la réaction-diffusion. Nous montrons que la solution sur réseau converge vers celle définie via un graphon, nous offrant une alternative à l'introduction de la dynamique sur un très grand graphe. Cette approche par les graphons nous faisant gagner de la mémoire et du temps d'exécution, elle permet entre autres de connaître plus facilement les motifs de Turing. Un autre avantage du graphon est la détermination relativement aisée de la stabilité et de la structure propre de l'opérateur graphon correspondant. Cet opérateur étant l'analogue en dimension infinie de la matrice Laplacienne du graphe, il nous permet d'éviter d'étudier la structure propre d'une matrice de grande dimension.

Mots-clés : Dynamique sur réseau, réaction-diffusion, graphon/graphe limite, instabilité de Turing

Abstract

Studying a network and the dynamics on the network is really interesting because the process encountered in the nature or in the technology can usually be modelled that way. However, the complexity of such networks, that are growing bigger, still prevents to get several answers. We place ourselves in the graph limit theory, that defines a limit object called graphon keeping the network structure in mind. We apply that theory to the reaction-diffusion dynamics including Turing instability cases, where a stable equilibrium with the reaction becomes instable when adding the diffusion. We show that the solution on the network tends to the solution defined with the graphon frame of work. It then gives an alternative to the dynamics on a huge graph. That approach with graphons needing less memory and taking less time, it allows among other things to predict easily the Turing patterns. An other advantage to graphons is the quite easy determination of the eigenstructure and the stability of the graphon operator, defined from a graphon. This operator being the infinite dimension analog of the graph Laplacian matrix, it allows us to avoid to study the structure of a huge matrix.

Keywords : dynamical network, reaction-diffusion, graphon/graph limit, Turing instability

Table des matières

Remerciements	1
Résumé/Abstract	2
Introduction	5
1 Limites de graphes et graphons	9
1.1 Construction d'un graphon à partir d'un graphe	16
1.2 Distances et normes	17
2 Construction différente pour les graphes creux	21
2.1 Notations et définitions	23
2.1.1 Construction d'un graphon à partir d'un graphe	26
2.1.2 Construction d'un graphe creux à partir d'un graphon	29
2.2 Convergences	30
3 Dynamique de réaction-diffusion sur réseau et instabilité de Turing	33
3.1 Dynamique sur réseau et via un graphon	33
3.2 Théorèmes d'existence, d'unicité et de convergence	35
3.3 Réaction-diffusion pour une espèce	45
3.4 Réaction-diffusion pour deux espèces	48
3.4.1 Graphons	49
3.4.2 Conditions initiales	52
3.4.3 Exemples	53
3.5 Structure propre de l'opérateur graphon	74
3.6 Stabilité de l'équilibre homogène pour un système de réaction-diffusion	77
4 Perspectives	87
4.1 Graphon construit depuis un "graphe spatial"	88
4.2 Régularité des solutions	88
Conclusion	89

Introduction

Dans la société actuelle, un bon nombre de technologies et de modélisations se servent de la notion de réseaux et de graphes [Med14a]. Que ce soit dans les réseaux sociaux ou quand nous nous intéressons aux neurones cérébraux et leurs connexions, nous nous trouvons en présence de très grands graphes (un nombre élevé de nœuds). Un des challenges est alors de pouvoir étudier ce réseau de façon efficace, tant du point de vue de ses propriétés que de sa structure ou encore de la caractérisation et l'étude de la dynamique que nous pourrions définir sur ces réseaux. En effet, l'utilisation de grands graphes entraîne un besoin de mémoire important et d'une grande puissance de calcul. Il est à ce jour encore difficile d'appréhender certains réseaux rencontrés dans notre quotidien, de par la complexité d'obtenir complètement les données et l'obligation de réduire l'information afin de pouvoir effectivement appliquer de la dynamique sur ce réseau. Une piste construite récemment est la notion de graphe limite, objet construit à partir d'une suite de graphes convergente [BCL⁺11].

Cet objet également appelé graphon possède de nombreux avantages et c'est la raison pour laquelle ce domaine se développe très rapidement. Tout d'abord, le graphon permet de garder la structure du graphe et autres informations importantes qui caractérisent un graphe et ce sous une forme différente. Ensuite, un graphon ne dépend pas de la taille du graphe à partir duquel nous avons obtenu le graphon. Il y a par conséquent un avantage algorithmique puisque nous pouvons décrire de très grands graphes et la dynamique sur ces graphes en limitant énormément le stockage utilisé. Il y a cependant quelques difficultés liées à ce domaine. Il faut, avant de pouvoir l'utiliser, arriver à trouver le graphon, ce qui n'est pas toujours aisé, mais également nous assurer que ce graphon est effectivement la limite d'une suite de graphes possédant les conditions requises.

Nous commençons dans cette introduction par définir les termes liés à un graphe. Nous définissons également le terme "instabilité de Turing" [Tur52], dynamique instable particulière existant dans certaines réactions-diffusions. Dans le premier chapitre, les limites de graphes ou graphons seront présentés ainsi que les distances et normes nécessaires. Nous étudions également les différentes propriétés et théorèmes utiles ainsi que certains exemples pour clarifier ces nouveaux termes. Dans le second chapitre, nous abordons le cas des graphes creux, graphes pour lequel il y a peu de connexions entre les sommets, et nous montrons qu'il nous faut une théorie spécialement pour ce type de graphes [BCCZ14]. La terminologie pour la dynamique sur réseau et via le graphon sera présentée dans le troisième chapitre ainsi que les théorèmes de convergence des solutions. Nous montrons dans ce même chapitre une série d'exemples avec différents graphons et présentant dans certains cas une instabilité de Turing. La dynamique considérée dans ce mémoire sera

du type réaction-diffusion. Nous mettons en évidence la forme des solutions et les motifs de Turing lorsqu'ils existent, la comparaison entre la dynamique sur graphe et celle sur graphon ou encore la vitesse de convergence des solutions. Nous étudions également la structure de l'opérateur graphon, opérateur dont le graphon est le noyau intégral, ainsi que la stabilité des équilibres de la dynamique de réaction-diffusion sur réseau et via un graphon. Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, nous mettons en avant quelques perspectives et généralisations qui nous semblent pertinentes comme travail futur dans ce domaine.

Commençons par définir et commenter les termes importants qui nous seront utiles dans la suite. En premier lieu, nous définissons les notions fondamentales de la théorie des graphes. Dans un second temps, nous présentons brièvement l'instabilité de Turing [Tur52], intervenant dans certaines dynamiques et entraînant des motifs de Turing tels que les motifs sur des fleurs.

Abordons tout d'abord le vocabulaire de la théorie des graphes. Nous nous sommes servis du cours de Théorie des graphes de M. Lambiotte [Lam].

Un graphe G possède un ensemble de n nœuds autrement appelés sommets, noté $V(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$, et un ensemble d'arêtes qui relient un nœud à lui-même ou deux nœuds ensemble, noté $E(G)$. Par notation, si une arête relie le sommet i au sommet j , alors $ij \in E(G)$. Par rapport au nombre de sommets d'un graphe, nous utilisons souvent la notation G_n pour rappeler le nombre de nœuds du graphe G . Le degré d'un nœud i , appelé k_i , est le nombre d'arêtes qui ont pour sommet d'origine ou d'arrivée le nœud i . Le graphe G est appelé graphe dense si $|E(G)| = \mathcal{O}(|V(G)|^2)$ et est dit creux sinon.

Dans ce mémoire, nous nous focalisons sur les graphes simples, c'est-à-dire des graphes n'ayant pas de boucle, une boucle étant une arête qui relie un nœud à lui-même, ni d'arête multiple, en d'autres termes il y a au maximum une arête entre deux nœuds. Nous prenons également comme hypothèse que le graphe est non-orienté, c'est-à-dire que les arêtes n'ont pas de direction.

La matrice d'adjacence A du graphe G est la matrice carrée de taille n telle que l'élément (i, j) donne le nombre d'arêtes qui relient le nœud i avec le nœud j [INC]. Nous avons, en considérant que le graphe est simple et non-orienté, que la matrice d'adjacence est symétrique, ne contient que des 0 et des 1, 0 s'il n'y a pas d'arêtes entre les deux nœuds et 1 s'il y en a une. Le graphe étant simple, nous ne pouvons avoir plus d'une arête entre deux nœuds. La diagonale est obligatoirement remplie de 0 uniquement, le graphe ne possédant aucune boucle.

La matrice laplacienne L du graphe G est, comme première définition, constituée comme la différence entre la matrice d'adjacence A et la matrice des degrés \mathcal{M}_d . Cette matrice est diagonale et ses éléments diagonaux (i, i) , pour $1 \leq i \leq n$, correspondent au degré du nœud i . Une deuxième manière de définir et de construire la matrice laplacienne est $\frac{A}{\mathcal{M}_d} - \mathcal{I}$ où \mathcal{I} est la matrice identité. La différence d'utilisation vient de la façon dont nous considérons les mouvements sur le graphe. Si nous imaginons une marche aléatoire

avec un temps d'attente commun à tous les nœuds, alors c'est la seconde définition qui sera considérée. Par contre, si cette dynamique est construite de sorte à ce que toutes les arêtes soient empruntées uniformément, c'est la première définition qui sera retenue. Dans notre cas, nous nous basons sur la première écriture puisque celle-ci permet à l'état homogène d'être dans le noyau de la diffusion, ce qui veut dire que l'équilibre trouvé pour la réaction sera également un équilibre pour la réaction-diffusion. De plus, cette matrice laplacienne $L = A - \mathcal{M}_d$ correspond à la discrétisation de l'opérateur Laplacien ∇^2 qui intervient en faisant de la réaction-diffusion.

Étant donné que nous travaillons sur des graphes de grande taille (n grand) et que nous considérons ces graphes comme étant le $n^{\text{ème}}$ élément d'une suite de graphes (G_i) , nous allons devoir définir des termes supplémentaires liés à la convergence de suite de graphes, par conséquent définir la distance entre deux graphes. Ceci est l'objet du chapitre suivant et nous nous basons fortement sur les notations de [BCL⁺11].

Présentons maintenant l'instabilité de Turing. Dans notre environnement, nous rencontrons souvent des objets présentant des motifs [Les13]. Que ce soit le zèbre et ses rayures à la figure 1, une fleur et ses zones colorées à la figure 2 ou encore le corps humain et la formation des organes et couches cellulaires à la figure 3, nous remarquons que le milieu n'est pas homogène et présente des disparités. Turing (1912-1954) en a donné une preuve [Tur52]. Il s'agit de systèmes dynamiques de type réaction-diffusion dont les équilibres deviennent instables de par la diffusion qui existe dans la dynamique mais qui sont stables en ne considérant que les réactions chimiques/biologiques [IIM16]. Ces systèmes présentent alors ce que nous appelons une instabilité de Turing.



FIGURE 1 – Zèbre [Zeb]



FIGURE 2 – Iris [Iri]

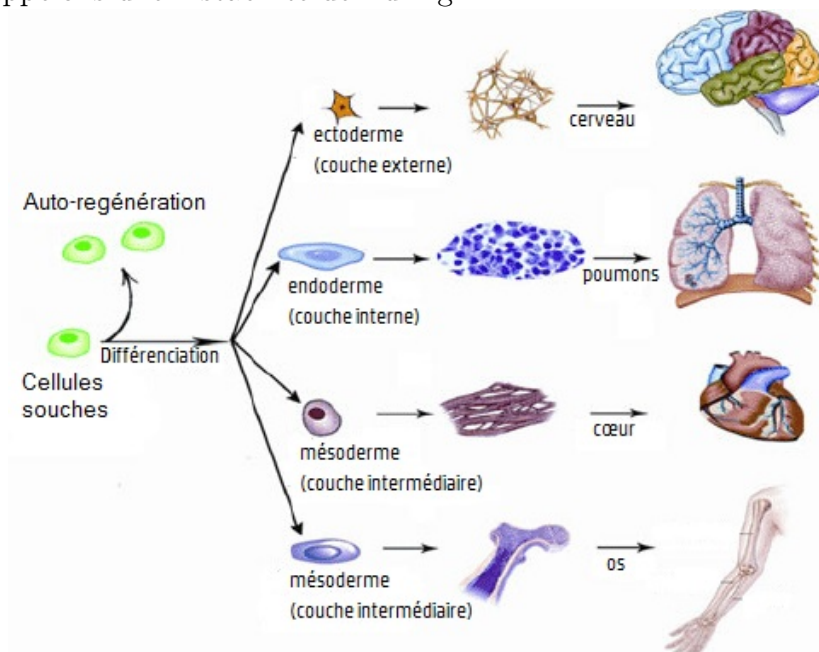


FIGURE 3 – Diagramme montrant la morphogénèse des organes humains [VBMW12]

Chapitre 1

Limites de graphes et graphons

Dans ce chapitre, nous présentons ce qu'est un graphon, terme central de notre mémoire. Nous en donnons une définition, qui nécessite plusieurs autres notions pour y parvenir. Ensuite, nous présentons comment ce graphon peut être trouvé et construit. Enfin, nous présentons les distances et normes définies sur des graphes, des graphons voire même des distances entre les deux objets.

Nous travaillons dans ce mémoire avec des graphes possédant un grand nombre de nœuds et obtenu comme le $n^{\text{ème}}$ terme d'une suite de graphes. Par conséquent, il y a un sens d'étudier la notion de "convergence". Pour déterminer si une suite de graphes est convergente, nous définissons la notion d'homomorphisme entre deux graphes puis caractérisons l'objet limite, appelé graphon.

Définition - morphisme de graphes

Un morphisme de graphes Φ , également appelé homomorphisme de graphes, est une fonction définie sur l'ensemble de nœuds d'un graphe et à valeurs dans l'ensemble de nœuds d'un autre graphe et préservant la contiguïté. En d'autres termes, s'il y a une arête entre deux nœuds i et j du graphe de départ, il doit y avoir également une arête entre les nœuds $\Phi(i)$ et $\Phi(j)$ dans le graphe d'arrivée.

La fonction $\text{hom}(F, G)$ donne le nombre d'homomorphismes qu'il y a du graphe F au graphe G . Prenons garde que cette fonction n'est pas symétrique. Comme exemple pour la fonction $\text{hom}(F, G)$, considérons un graphe G_1 à 2 nœuds et un graphe G_2 à 3 nœuds dont les représentations visuelles sont les schémas 1.1 et 1.2. Pour connaître le nombre d'homomorphismes entre ces deux graphes nous considérons toutes les combinaisons possibles de prendre 2 nœuds différents dans le graphe G_2 . Le tableau 1.3 donne toutes les façons différentes d'associer les deux nœuds du graphe G_1 à deux nœuds du graphe G_2 tout en préservant le fait que les deux graphes sont simples. La première ligne signifie que nous prenons une fonction $\Phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ telle que $\Phi(A) = 1$ et $\Phi(B) = 2$ et nous avons bien un homomorphisme puisque AB est une arête de G_1 et 12 est une arête de G_2 . Lorsque nous prenons la fonction Φ définie par $\Phi(A) = 3$ et $\Phi(B) = 2$, nous n'avons pas d'homomorphisme car bien que AB soit une arête de G_1 , 32 n'est pas une arête de G_2 . Avec ce tableau, nous voyons qu'il y a 4 morphismes du graphe G_1 vers le graphe G_2 .



FIGURE 1.1 – Graphe G_1

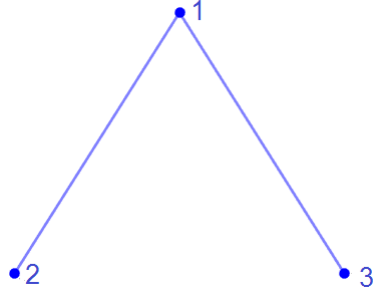


FIGURE 1.2 – Graphe G_2

1	2	3	Homomorphisme ?
A	B		oui
B	A		oui
A		B	oui
B		A	oui
	A	B	non
	B	A	non

FIGURE 1.3 – Tableau de correspondances

Nous définissons, à partir de cette notion d’homomorphisme entre graphes, la fonction $t(F, G)$ qui prend comme argument deux graphes et qui correspond à

$$t(F, G) = \frac{hom(F, G)}{|V(G)|^{|V(F)|}} . \quad (1.1)$$

Cette fonction est vue comme une densité d’homomorphismes puisque nous comptabilisons le nombre de morphismes existant entre les deux graphes et que nous divisons par le nombre maximal d’homomorphismes que nous pourrions obtenir. Nous pouvons maintenant présenter ce qu’est une suite de graphes convergente.

Définition - convergence d’une suite de graphes

Une suite (G_n) de graphes est convergente si la suite $t(F, G_n)$ a une limite pour tout graphe simple F .

Une question nous est venue à l’esprit par rapport à cette définition. Cette limite est-elle unique ou bien dépend-elle du graphe F considéré ? Pour comprendre cela, nous avons construit numériquement une suite de graphes G_n et nous avons étudié la suite $t(F, G_n)$ pour plusieurs graphes F différents. La suite G_n a été prise comme celle décrite au point 3.1 de [BCL⁺11]. Nous démarrons avec un nœud et, à chaque itération, nous ajoutons un nouveau nœud à l’ensemble $V(G)$. Ensuite, chaque paire de nœuds non encore reliés est connectée avec une probabilité de $\frac{1}{n}$ où n est le nombre de nœuds à l’itération considérée. Le pseudo-code 1.1 nous résume cette construction.

Un exemple de graphe construit via cet algorithme est présent à la figure 1.4 et a été réalisé grâce à Gephi [Gep]. Nous remarquons qu’il y a des nœuds assez centraux, très connectés et puis des nœuds peu voire pas connectés.

La matrice d’adjacence ressemble alors à la figure 1.5 (100 nœuds) où les cases noires représentent l’existence d’un lien entre les deux nœuds de la ligne et la colonne correspondantes. Remarquons que cette suite est aléatoire et que deux réalisations différentes donnent souvent deux matrices différentes. Cependant, au plus n est grand, au plus les matrices résultantes semblent visuellement proches (figures 1.5 et 1.6 par exemple).

TABLE 1.1 – Algorithme 1

Algorithme de construction de la suite G_n provenant de [BCL⁺11] point 3.1

Initialisation

$1 \in V(G_1)$

$E(G_1) = \emptyset$

Boucle

pour i allant de 2 à tailleMax

$V(G_i) = V(G_{i-1}) \cup \{i\}$

$E(G_i) = E(G_{i-1})$

pour tout $j < k$ dans $V(G)$

si $jk \notin E(G_{i-1})$

$jk \in E(G_i)$ avec une proba de $\frac{1}{i}$

fin si

fin boucle

fin boucle

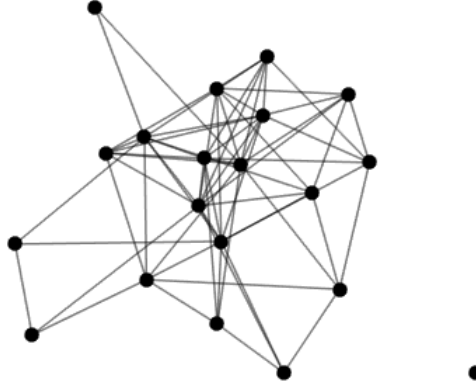


FIGURE 1.4 – Exemple de graphe construit par le pseudo-code de la table 1.1

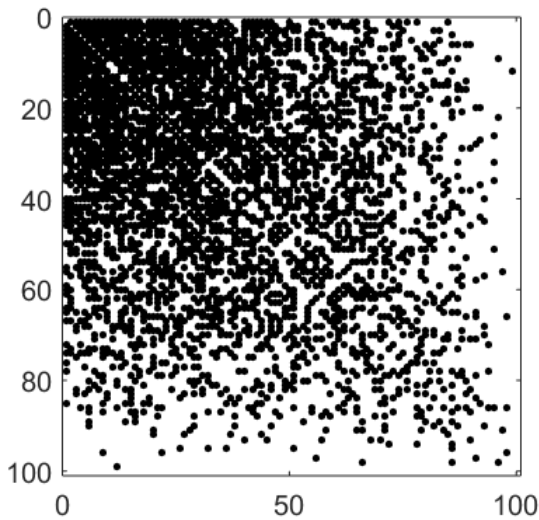


FIGURE 1.5 – Matrice d'adjacence de G_{100} construit par l'algorithme de la table 1.1 - exécution 1

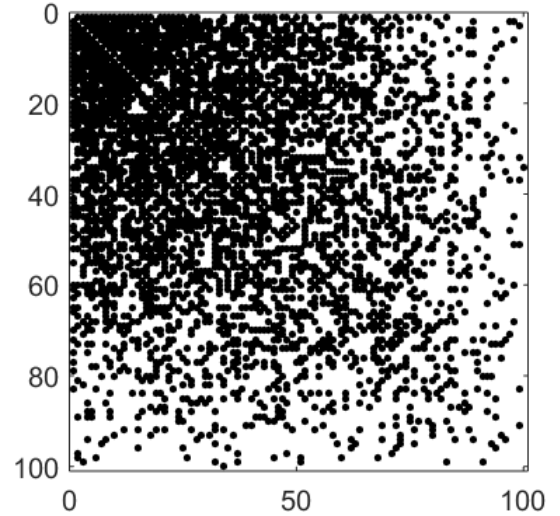


FIGURE 1.6 – Matrice d'adjacence de G_{100} construit par l'algorithme de la table 1.1 - exécution 2

Les graphes F choisis pour vérifier l'unicité de la limite sont les trois graphes représentés aux figures 1.7, 1.8 et 1.9. Lorsque nous affichons la densité d'homomorphismes pour n allant de 5 à 200 par pas de 5, nous avons alors les figures 1.10, 1.11 et 1.12. Nous avons ainsi la confirmation que cette valeur limite n'est pas unique mais qu'il y a bien cette notion de limite à atteindre quelque soit le graphe F considéré. Nous voyons également qu'au plus le graphe F est creux, au plus cette densité est grande, ce qui est cohérent avec les implications à vérifier pour avoir un homomorphisme. Il y a effectivement peu de conditions à vérifier si le graphe F considéré contient peu d'arêtes.

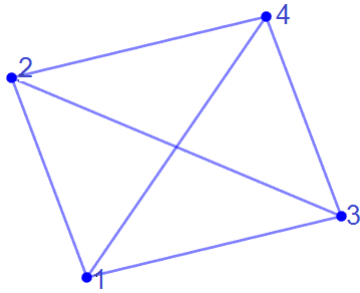


FIGURE 1.7 – Graphe F_1



FIGURE 1.8 – Graphe F_2



FIGURE 1.9 – Graphe F_3

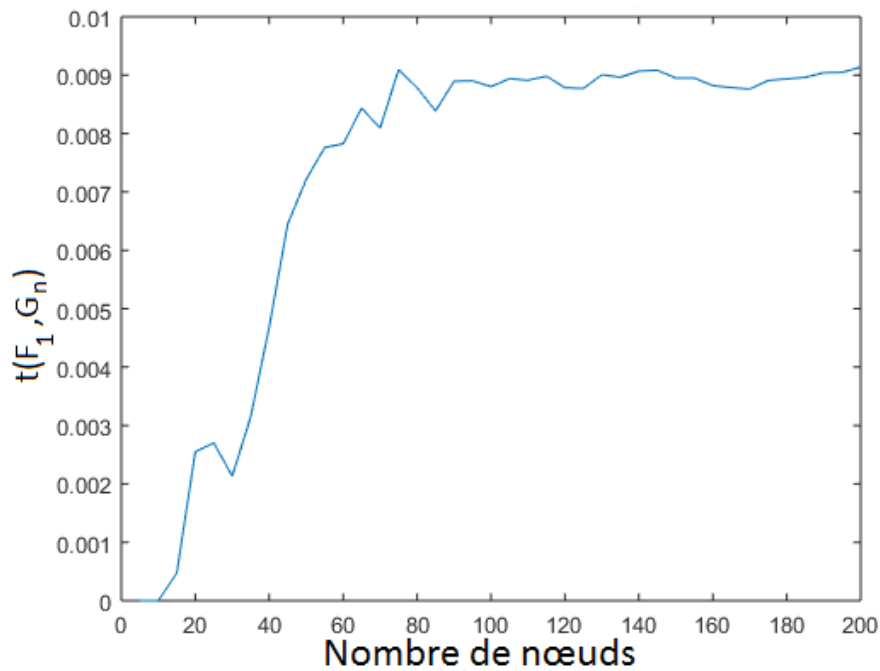


FIGURE 1.10 – Densité d'homomorphisme pour F_1

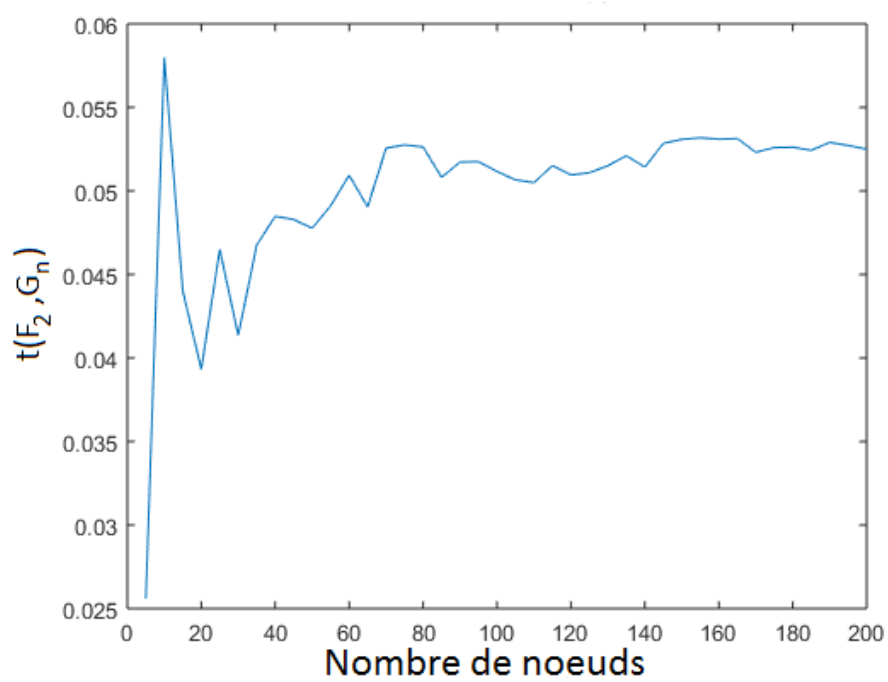


FIGURE 1.11 – Densité d'homomorphisme pour F_2

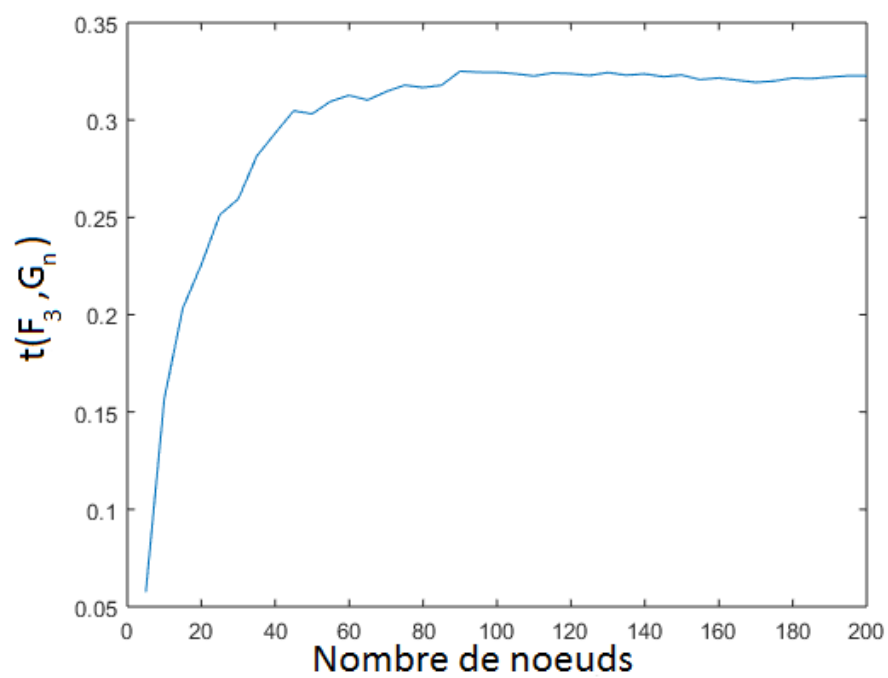


FIGURE 1.12 – Densité d'homomorphisme pour F_3

Nous avons une définition de suite de graphes convergente, la prochaine étape est de trouver, caractériser l'objet limite, appelé graphon. Cet objet peut être représenté comme une fonction mesurable. Nous considérons que cet objet appartient à \mathfrak{W} l'espace des fonctions bornées mesurables (au sens de Lebesgue sur l'espace produit $[0, 1]^2$ que nous notons parfois comme I^2 avec $I = [0, 1]$) $W : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour presque tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $W(x, y) = W(y, x)$. Si nous limitons l'espace des images à $[0, 1]$, nous le notons comme \mathfrak{W}_0 . Dans le cas d'un graphe simple, le graphon appartiendra toujours à \mathfrak{W}_0 . En considérant la suite de graphes construite grâce à l'algorithme de la table 1.1 [BCL⁺11], le graphon relatif à (G_n) s'avère être la fonction

$$W(x, y) = 1 - \max(x, y) \text{ où } x, y \in [0, 1] . \quad (1.2)$$

En effet, la probabilité que les nœuds i et j soient connectés vaut $1 - \frac{\max(i, j)}{n}$. Étant donné que nous représentons ces nœuds en discrétisant l'intervalle $[0, 1]$, nous avons $i = xn$ et $j = yn$ avec $x, y \in [0, 1]$ et la fonction devient la fonction définie à l'équation (1.2).

Lorsque nous représentons cette fonction projetée sur le plan du domaine $[0, 1]^2$, nous avons la figure 1.13. En comparant les figures 1.13 et 1.14, que nous avons repris de la figure 1.5 afin de pouvoir mieux les opposer, nous en concluons que le graphon donné est adéquat pour représenter la matrice d'adjacence via une fonction mesurable sur $[0, 1]^2$. Nous en donnerons une confirmation après avoir défini des mesures de similarité entre graphes et graphons.

En ayant une suite de graphes convergente, il est alors possible de calculer $t(F, W)$ vue comme la limite de $t(F, G_n)$. Par extension,

$$t(F, W) = \int_{[0, 1]^{|V(F)|}} \prod_{ij \in E(F)} W(x_i, x_j) dx_1 \dots dx_{|V(F)|} . \quad (1.3)$$

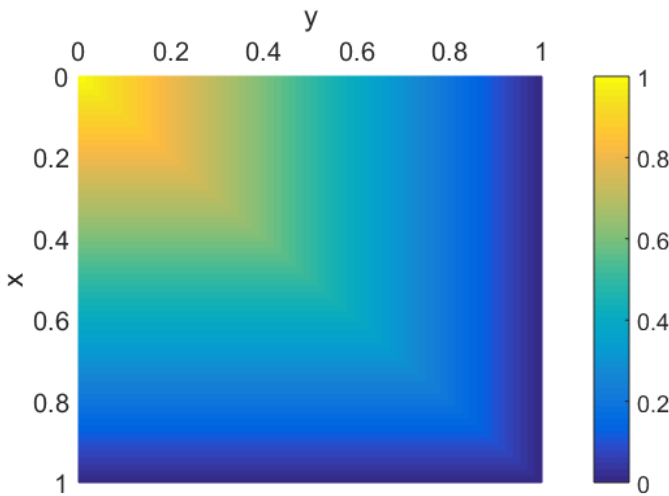


FIGURE 1.13 – Graphon projeté en 2 dimensions (point 3.1 de [BCL⁺11])

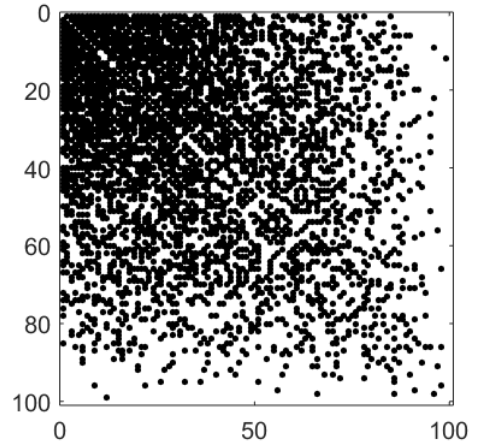


FIGURE 1.14 – Matrice d'adjacence de G_{100} construit via l'algorithme de la table 1.1

Nous voyons le correspondant entre les définitions (1.1) et (1.3), étant donné que l'espace des nœuds de G est $V(G)$ qui est remplacé par l'intervalle $[0, 1]$, que $\text{hom}(F, G)$ sous-entend une somme puisque $\text{hom}(F, G)$ comptabilise tous les morphismes de graphes de F à G parmi les choix de nœuds de F . Cette somme devient une intégrale par la limite thermodynamique. Le graphon W remplace quant à lui la matrice d'adjacence A .

Intéressons nous maintenant à cette idée de convergence. Le théorème suivant, venant de [BCL⁺11], nous donne l'existence d'un graphon pour une suite de graphes simples convergente et inversement. Cependant, trouver le graphon à partir d'une suite de graphes ou la suite de graphes depuis un graphon n'est pas aisé. Si la suite de graphes est construite de façon déterministe avec un algorithme connu, le graphon pourra cependant être trouvé facilement. Nous présenterons une démonstration de haut niveau de ce théorème.

Théorème 1.0.1. *Pour toute suite convergente (G_n) de graphes simples, il existe un graphon $W \in \mathfrak{W}_0$ telle que $t(F, G_n) \rightarrow t(F, W)$ pour tout graphe simple F . De plus, la fonction W est unique à des transformations préservant les mesures près. Enfin, pour tout $W \in \mathfrak{W}_0$ il existe une suite de graphes simples (G_n) telle que W est le graphon de $(G_n)_n$.*

L'unicité de W à des transformations préservant les mesures près nous indique que nous pouvons faire une transformation $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui réordonne l'intervalle $[0, 1]$ et qui préserve la notion de mesure, le graphon résultant sera toujours valable. En termes de graphes, cela signifie que, même si nous réordonnons les nœuds, nous obtenons le même graphe limite.

Essayons maintenant de comprendre en quoi le fait que la suite $t(F, G_n)$ converge vers une valeur implique l'existence d'un graphon. Pour ce faire, nous nous sommes attardés sur la démonstration de ce résultat [LS06]. Le théorème montre que, si une suite de graphes est convergente, dans le sens que $t(F, G_n)$ converge pour tout graphe F lorsque n tend vers l'infini, il existe une fonction symétrique mesurable $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(F, G_n) = t(F, W).$$

De cette suite de graphes convergente, nous pouvons toujours construire une sous-suite de graphes, qui converge aussi. Nous allons construire une sous-suite particulière possédant une caractéristique de régularité importante, nous allons nous assurer que chaque graphe de la sous-suite possède une partition de Szemerédi [Des11]. Cette partition, liée au lemme de régularité, est telle que les liens de chaque sous-ensemble se comportent de manière régulière. Pour obtenir cette sous-suite, nous utilisons le lemme suivant.

— Lemme - Construction de (sous-)suites —

Pour toute suite de graphes (G_n) , il existe une sous-suite de graphes (G'_m) définissant une suite d'entiers positifs (k_m) et une suite de matrices (Q_m) vérifiant deux propriétés que sont

- pour tout m , Q_m est une matrice de dimension $k_m \times k_m$ symétrique et dont chaque élément est entre 0 et 1,
- si i est inférieur à j , alors k_j est un multiple de k_i et Q_i est obtenu à partir que Q_j en partitionnant les lignes/colonnes en k_i blocs de $\frac{k_j}{k_i}$ éléments et en remplaçant chacun de ces blocs par un unique élément, la moyenne du bloc.

Un second lemme vient alors aider à terminer la preuve.

— Lemme - Existence d'une fonction W —

Soit (k_m) une suite d'entiers positifs et (Q_m) une suite de matrices vérifiant les deux propriétés du "lemme - Construction de (sous-)suites". Alors, il existe une fonction mesurable symétrique $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que $W_{Q_m} \rightarrow W$ presque partout.

La condition que la suite de graphes doit être convergente ne nous semble pas très contraignante. En effet, pour la plupart des suites, elles sont convergentes et le graphe limite peut effectivement être défini. Par exemple, en prenant une suite de réseaux Erdős-Rényi avec probabilité $p = \frac{1}{2}$, l'ajout d'un nouveau nœud aura de moins en moins d'impact sur la connectivité du réseau et, en moyenne, tous les liens existent avec une probabilité p quelle que soit la taille du graphe. Il semble donc logique que le graphe limite soit une fonction constante, égale à p d'ailleurs. A titre de contre-exemple, imaginons que nous construisons une suite de graphes à n nœuds de la façon suivante :

Si n est pair, nous prenons un Erdős-Rényi avec $p = \frac{1}{2}$.
Si n est impair, nous prenons un Erdős-Rényi avec $p = \frac{1}{3}$.

Il semble assez évident que $t(F, G_n)$ va osciller entre deux courbes. En effet, si nous nous contentons des termes pairs, $t(F, G_{2n})$ converge vers une valeur t_1 dépendant de F puisqu'avec n augmentant le réseau va s'uniformiser de plus en plus. En prenant la suite $t(F, G_{2n+1})$, elle converge vers une autre valeur, supérieure à t_1 puisqu'il y a moins de liens donc moins de conditions à vérifier. La suite complète elle ne converge pas car elle possède deux sous-suites qui convergent vers des valeurs différentes. Par conséquent, nous ne pouvons trouver de graphon qui serait l'objet limite à une telle suite de graphes. Assez intuitivement, la sous-suite des graphes de degrés pairs convergera vers le graphon $W \equiv \frac{1}{2}$ tandis que celle des degrés impairs converge vers $W \equiv \frac{1}{3}$. Quel objet unique pourrait alors rendre compte de ces deux graphons en même temps ? Aucun d'après le théorème !

Remarquons qu'à partir d'un graphe, nous pouvons toujours construire un graphon, ceci est expliqué dans le point suivant.

1.1 Construction d'un graphon à partir d'un graphe

Ce graphon est noté W_G pour rappeler comment il a été obtenu. Il appartient à \mathfrak{W}_0 et est construit en deux étapes :

1. Nous divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $|V(G)| = n$ intervalles égaux I_i , $1 \leq i \leq n$, de longueur $\frac{1}{n}$.
2. Pour $x \in I_i$ et $y \in I_j$, le graphon W_G vaut 1 si $ij \in E(G)$ et 0 sinon.

Nous remarquons que la fonction obtenue est constante par morceaux de surface $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$ et que la valeur de la case $I_i \times I_j$ correspond à l'élément (i, j) de la matrice d'adjacence. Le graphon W_G construit depuis un graphe G sera beaucoup utilisé dans ce mémoire.

1.2 Distances et normes

Afin de pouvoir effectivement comparer des graphes et graphons entre eux et d'être en possession d'outils qui permettent d'étudier la convergence d'une suite de graphes, il faut définir des notions de distances entre graphes mais également entre graphons :

1. *Cut-norm* (graphon) : Soit $W \in \mathfrak{W}_0$, $\|W\|_{\square} = \sup_{S, T \subset [0,1]} |\int_{S \times T} W(x, y) dx dy|$,
2. *Cut-distance* (graphon) : Soient $W, U \in \mathfrak{W}_0$, $\delta_{\square}(U, W) = \inf_{\sigma: [0,1] \rightarrow [0,1]} \|U - W^{\sigma}\|_{\square}$ où σ est une fonction inversible préservant les mesures et $W^{\sigma}(x, y) = W(\sigma(x), \sigma(y))$,
3. *Cut-distance* (graphe) : Soient G, G' des graphes, $\delta_{\square}(G, G') = \delta_{\square}(W_G, W_{G'})$,
4. Une distance mixte peut également être définie, elle consiste en $\delta_{\square}(G, W) = \delta_{\square}(W_G, W)$ avec W un graphon et G un graphe,
5. *Norme L_1* : Soit $W \in \mathfrak{W}_0$, $\|W\|_1 = \int_{[0,1]^2} |W(x, y)| dx dy$,
6. *Edit-distance* : Soient $W, U \in \mathfrak{W}_0$, $\delta_1(U, W) = \inf_{\sigma: [0,1] \rightarrow [0,1]} \|U - W^{\sigma}\|_1$.

La cut-norm est donc vue comme l'intégrale maximale de $|W|$ sur des sous-espaces mesurables de $[0, 1]^2$. Si cette fonction W est à valeur dans $[0, 1]$, alors l'intégrale maximale sera toujours atteinte en prenant S et T égaux à $[0, 1]$. La cut-norme aurait ainsi la même définition que pour la norme L_1 . Si cette fonction W est à valeurs dans \mathbb{R} , alors les sous-espaces S et T forment le rectangle $S \times T$ inclus à I^2 dont l'intégrale est maximale. Dans tous les cas, nous avons

$$\|W\|_{\square} \leq \|W\|_1 \quad \forall W \in \mathfrak{W}.$$

La cut-distance quant à elle est la distance minimale qu'il est possible d'atteindre entre deux graphons en réordonnant l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction σ .

Signalons que la cut-distance n'est pas une métrique. En effet, $\delta_{\square}(G, F) = 0 \nRightarrow G = F$. Ces deux graphes ayant une cut-distance nulle sont en fait un même graphe dont les nœuds ont été réordonnés. Par conséquent, si nous partons du principe que deux graphes identiques à une permutation de nœuds près sont un seul et même graphe et que nous munissons l'ensemble de ces graphes (appartenant à l'ensemble de graphes que nous notons \mathcal{G}) de la cut-distance, nous obtenons un espace métrique et complet $(\mathcal{G}, \delta_{\square})$. Nous pouvons alors définir la convergence d'une suite de graphes via des suites de Cauchy. L'énoncé de ce théorème est le suivant et provient de [BCL⁺11].

Théorème 1.2.1. *Une suite de graphes (G_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace métrique $(\mathcal{G}, \delta_{\square})$. Cette suite (G_n) converge vers W si et seulement si $\delta_{\square}(W_{G_n}, W) \rightarrow 0$.*

Nous avons maintenant les outils qui permettent de savoir si une suite de graphes converge bien vers un graphon. Nous devons construire à partir du graphe G , le graphon W_G et il s'avère que nous obtenons la représentation visuelle de la matrice d'adjacence. Par exemple, avec le cas de la suite construite dans [BCL⁺11] point 3.1, nous avons typiquement la figure 1.5 comme matrice d'adjacence et si nous redimensionnons dans l'intervalle $[0, 1]$, nous obtenons le graphon $W_{G_{100}}$ montré à la figure 1.15. En comparant cette suite W_{G_n} à W donné à l'équation 1.2, nous obtenons la figure 1.16.

Cette image a été obtenue de la façon suivante. Nous avons évalué le graphon sur une grille de points. Nous avons comparé les valeurs de cette grille avec les entrées de la matrice d'adjacence, en ayant au préalable redimensionné cette matrice pour qu'il y ait le même nombre de points considérés. En effet, en considérant un nombre de points différents lorsque nous comparons le graphon avec un graphe de dimension différente, cela mène à plus de termes pour calculer la norme lorsque le graphe a plus de nœuds et donc une norme plus grande. Afin de ne pas fausser les résultats, nous avons par conséquent redimensionné chaque terme de la suite de graphes en un graphe de 1000 nœuds via une duplication des entrées. Le choix qui a été fait ici est de garder un graphe binaire et de créer des carrés ou rectangles dans lesquels une entrée unique de la matrice d'adjacence de départ est répétée dans le quadrilatère complet (principe montré à la figure 1.17 où d'un graphe à 2 nœuds, nous dupliquons pour obtenir un graphe à 11 nœuds). Pour comparer avec ce graphe à 1000 nœuds, nous prenons logiquement une grille de 1000 sur 1000 points sur laquelle nous évaluons la fonction graphon. Nous avons pris une norme deux de la différence entre la valeur du graphon en un point de la grille et l'entrée de la matrice d'adjacence correspondante. La figure 1.16 contient pour chaque n , nombre de sommets considéré, la norme maximale, minimale et la norme moyenne de 20 exécutions de l'algorithme 1.1.

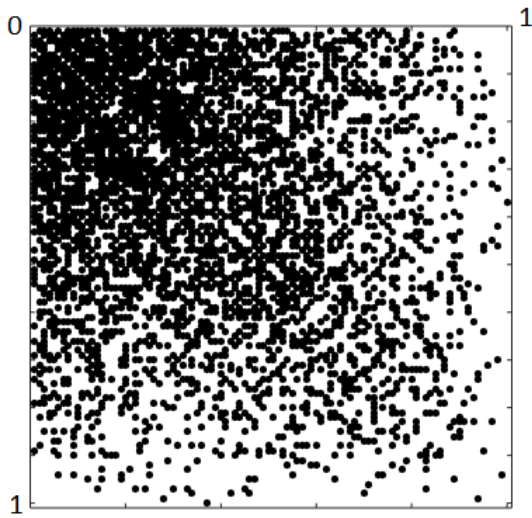


FIGURE 1.15 – Graphon $W_{G_{100}}$ à partir de G_{100} construit par l'algorithme de la table 1.1

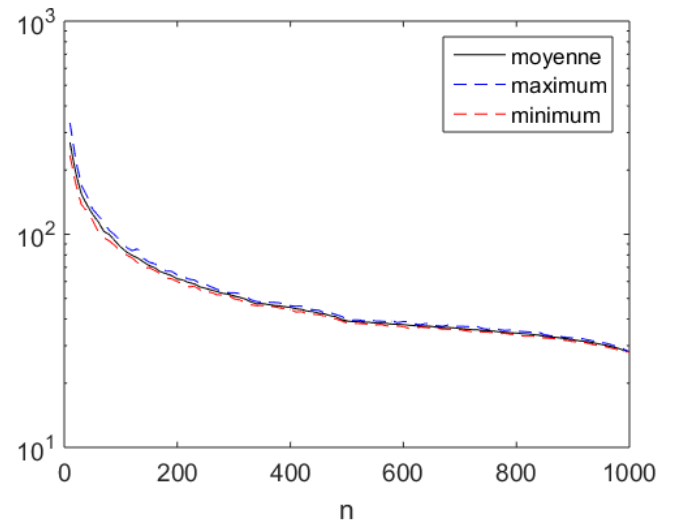


FIGURE 1.16 – Norme de $W - W_{G_n}$ (point 3.1 de [BCL⁺11])

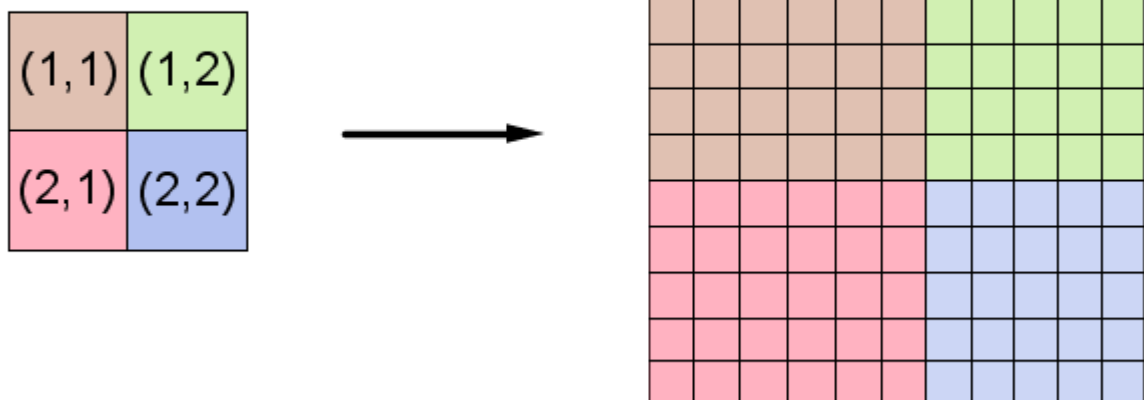


FIGURE 1.17 – Exemple de duplication de la matrice d'adjacence

Chapitre 2

Construction différente pour les graphes creux

Nous allons maintenant nous intéresser plus spécifiquement aux graphes creux. Un graphe est dense si le nombre de liens est de l'ordre de n^2 , n étant le nombre de nœuds. Il est creux si l'ordre est inférieur. C'est un type de graphes à ne pas négliger dans notre analyse car ceux-ci sont très présents en pratique. Un grand nombre de modélisations de phénomènes réels mènent en effet à de très grands graphes creux. Par exemple, modéliser un réseau social, la transmission synaptique dans le cerveau, le réseau routier, etc. mènent à des graphes ayant des millions voire des milliards de nœuds alors que les arêtes elles sont limitées. Dans le cas du cerveau, [Syn] nous indique que nous possédons 100 milliards de neurones et que chaque neurone est connecté en moyenne avec 10 000 autres. Nous avons donc un réseau avec beaucoup de nœuds et ceux-ci ne sont connectés qu'avec une petite fraction de sommets. La source principale de ce chapitre est [BCCZ14]. Nous allons définir des notions complémentaires dues à la densité du graphe. Ensuite, nous nous intéresserons aux théorèmes évoquant la convergence de suites de graphes creux et la construction de suites de graphes à partir d'un graphon.

Nous pourrions en première intuition tenter de garder la théorie construite dans le chapitre précédent. Néanmoins, cette théorie n'est pas pertinente lorsqu'elle est appliquée à des graphes creux car toutes les suites de graphes convergeraient vers le graphon identiquement nul. En effet, si la suite de graphes creux (G_n) est convergente, comme W_{G_n} converge par définition vers le graphon W et que W_{G_n} est reliée à la matrice d'adjacence (voir la section 1.1), nous avons que W est nul car les zones non nulles de W_{G_n} seront de plus en plus négligeables. Nous perdrons ainsi toutes les informations concernant les connexions qui existent dans le graphe mais qui n'apparaissent pas dans le graphon. Nous allons présenter trois théories spécifiques aux graphes creux :

- Une première théorie de limite de graphes spécifique aux graphes creux a été construite et concernait les graphes "très" creux, c'est-à-dire de degré borné ou au moins de degré moyen borné. Cette théorie implique que $|E(G)| = \mathcal{O}(n)$ et empêche potentiellement d'avoir des "spots" (taches), autrement dit des parties de graphes très connectées formant des communautés. Cette théorie est malheureusement peu utile car elle restreint le champ des graphes creux utilisables, il y a en effet aussi tous les graphes où $|E(G)| = \mathcal{O}(N)$, où $N = n^a$ avec a supérieur à 1 mais

inférieur à 2. Un grand nombre de graphes creux sont gouvernés par des lois de puissances (c'est-à-dire en considérant le nombre de nœuds pour des connectivités croissantes, nous avons par exemple la figure 2.1) et ces graphes n'entrent pas dans la catégorie des graphes de degré (moyen) borné.

- Bollobás et Riordan ont développé dans [BR09] une théorie de limite de graphes pour graphes creux qui consiste à renormaliser les graphes. L'idée sous-jacente est d'essayer de se ramener à un cas dense tout en gardant au maximum l'information sur le graphe creux. Ils étaient motivés par le fait que deux graphes de densités différentes pourraient être structurellement proches. Cette théorie a cependant une hypothèse assez restrictive, une hypothèse de bornitude ce qui interdit les taches denses. Si cette hypothèse est vérifiée, nous pouvons alors renormaliser le graphe, aboutir à un graphe dense, utiliser la théorie des graphes denses et conclure que le graphon obtenu est également valable pour le graphe creux.
- La théorie que nous allons retenir est celle présentée par Borgs-Chayes-Cohn-Zhao [BCCZ14]. En effet, elle permet de gérer tout type de graphe creux et de ne pas se ramener au cas trivial d'un graphon identiquement nul obtenu via la théorie de limite de graphes du chapitre 1. Elle se base sur une étude du graphon via sa norme L^p ($p > 1$) et pourra être étendue à $p = 1$ de manière assez fluide. A titre de comparaison avec les théories précédentes, celles-ci constituaient l'étude du graphon avec la norme L^∞ (graphes denses et Bollobás-Riordan du point précédent) puisqu'il y avait une hypothèse de borne uniforme sur le graphon. L'idée stimulant cette théorie est d'essayer de renormaliser la matrice de densité par une fonction dépendante du nombre de nœuds n de façon à avoir que le graphon W trouvé ne soit pas $W(x, y) = 0$ pour tout $x, y \in [0, 1]$. Cette opération mène à des graphons qui ne sont potentiellement plus bornés comme ils l'étaient avec des graphes denses. Remarquons que le graphon doit être au moins L^1 pour que l'analyse soit pertinente, sinon la notion de densité de graphes n'aurait pas de sens. Le réel p doit donc être supérieur (ou égal) à 1.

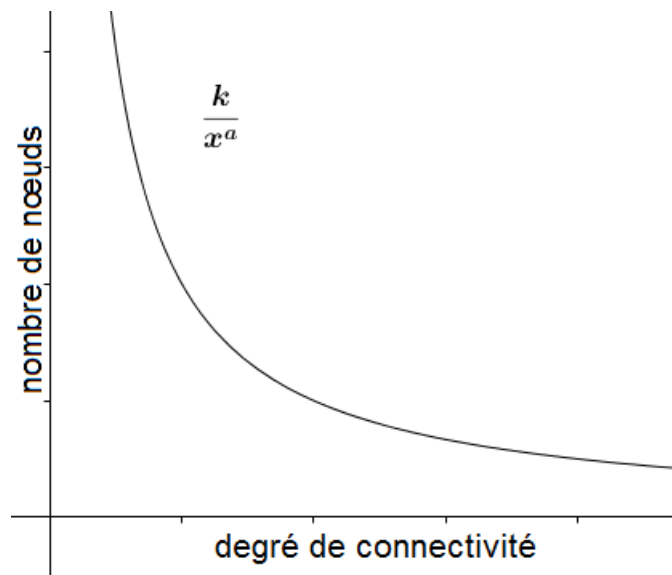


FIGURE 2.1 – Exemple de répartition des degrés d'une loi de puissance

2.1 Notations et définitions

Nous reprenons les notations du chapitre 1. En toute généralité, le graphe peut être pondéré par rapport aux nœuds et aux arêtes. Nous définissons ainsi

$$\alpha_i = \alpha_i(G) > 0 : \text{le poids du nœud } i,$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}(G) \in \mathbb{R} : \text{poids de l'arête } ij,$$

$$\alpha_U = \sum_{i \in U} \alpha_i \text{ (} U \subset V(G) \text{)} \text{ et } \alpha_G = \alpha_{V(G)},$$

$$\rho_G(S, T) = \sum_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \frac{\alpha_s \alpha_t}{\alpha_S \alpha_T} \beta_{st} \text{ pour } S, T \subseteq V(G).$$

Placer un poids sur les nœuds permet d'étudier des systèmes complexes de façon mieux adaptée, puisque intégrer un poids aux sommets permet de considérer l'importance relative de ces nœuds ou représenter une surface pour un réseau étudiant le climat, un volume pour un réseau neuronal [HDZ⁺12] [WDHK13]. Les deux dernières définitions servent à écrire de façon plus compacte la somme des poids des nœuds d'un sous-ensemble de $V(G)$ ou de $V(G)$ lui-même et la densité des arêtes entre deux sous-ensembles de $V(G)$ respectivement. Ces notations nous servent dans la suite car nous partitionnons le graphe en sous-graphes avec des contraintes sur cette partition qui sont liées au poids des nœuds et à la densité des arêtes.

Un graphon est une fonction mesurable symétrique définie sur $I^2 = [0, 1]^2$ et à valeurs réelles. Par conséquent nous utilisons la définition usuelle de la norme L^p d'une fonction :

$$\|W\|_p = \left(\int_{[0,1]^2} |W(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, nous avons

$$\|W\|_\infty = \text{ess sup}_{x, y \in I} W(x, y).$$

Le terme ess sup signifie que nous prenons la borne supérieure essentielle, c'est-à-dire que l'ensemble des points pour lequel $W(x, y)$ est supérieur à cette borne est de mesure nulle, est négligeable.

Un L^p -graphon est par conséquent un graphon dont la norme p est finie. Remarquons qu'un graphon est toujours un L^1 -graphon.

Afin de construire une théorie complète, un graphe doit lui aussi avoir une norme L^p . Celle-ci est définie comme

$$\begin{aligned} 1 \leq p < \infty & : \quad \|G\|_p = \left(\sum_{i,j \in V(G)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_G^2} |\beta_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ p = \infty & : \quad \|G\|_\infty = \max_{i,j \in V(G)} |\beta_{ij}|. \end{aligned}$$

Nous avons abordé qu'une normalisation doit être réalisée, elle consiste à prendre $G_{\text{norm}} = \frac{G}{\|G\|_1}$. En d'autres termes, les poids sur les arêtes sont divisés par la norme du graphe, les poids des nœuds quant à eux ne changent pas.

Faisons remarquer que nous n'imposons pas une borne supérieure sur la norme L^p d'un graphe G . De fait, imposer cela mènerait à ne considérer que des graphes denses. En effet, imposer une borne supérieure sur $\left\| \frac{G}{\|G\|_1} \right\|_p = \|G\|_1^{\frac{1}{p}-1}$ reviendrait à essayer de borner inférieurement $\|G\|_1$, en d'autres termes à imposer que le graphe G ait une densité d'arêtes minimale K qui mène à forcer que $|E(G)|$ soit d'ordre de n^2 puisque

$$\begin{aligned} K \leq \sum_{i,j \in V(G)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_G^2} |\beta_{ij}| & \Leftrightarrow K \leq \sum_{i,j \in V(G)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(\sum \alpha_k)^2} |\beta_{ij}| \\ & \Rightarrow K \leq \sum_{i,j \in V(G)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(\sum \min\{\alpha_k\})^2} |\beta_{ij}| \\ & \Rightarrow K \leq \sum_{i,j \in V(G)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{n^2 \min\{\alpha_k\}^2} |\beta_{ij}| \\ & \Rightarrow K n^2 \leq \sum_{i,j \in V(G)} \frac{\max\{\alpha_i, \alpha_j\}^2}{\min\{\alpha_k\}^2} |\beta_{ij}| \\ & \Rightarrow K n^2 \leq \sum_{i,j \in V(G)} \frac{\max\{\alpha_k\}^2}{\min\{\alpha_k\}^2} |\beta_{ij}| \\ & \Rightarrow \frac{K}{\kappa} n^2 \leq \sum_{i,j \in V(G)} |\beta_{ij}|, \quad \text{où } \kappa = \frac{\max\{\alpha_k\}^2}{\min\{\alpha_k\}^2} \geq 1 \text{ est fini,} \\ & \Rightarrow |E(G)| = \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

Quelle est dans ce cas l'hypothèse que nous devons mettre sur le graphe G et sa norme L^p pour pouvoir parler de limite de graphes et de graphon ? Le graphe doit être borné sur les densités d'arêtes par rapport à des partitionnements de $V(G)$. Il faut alors définir un nouveau terme que nous appelons "régulier L^p supérieur". Le terme "régulier" se réfère à la normalisation réalisée sur les sous-ensembles de la partition qui rend le graphe régulier sur chaque partie et le terme " L^p supérieur" signifie qu'une fois que cette normalisation est faite, le graphe a une norme L^p finie.

Définition - graphe régulier L^p supérieur

Un graphe G est dit régulier (C, η) - L^p supérieur si $\alpha_i \leq \eta \alpha_G$ pour tout $i \in V(G)$ et pour toute partition $(V_j)_1^m$ de $V(G)$ telle que $\alpha_{V_j} \geq \eta \alpha_G$ pour tout j , on a

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{\alpha_{V_i} \alpha_{V_j}}{\alpha_G^2} \left| \frac{\rho_G(V_i, V_j)}{\|G\|_1} \right|^p \leq C^p \quad (2.1)$$

Cela signifie que, pour toute partition de $V(G)$ où aucune des parties n'est trop petite (par rapport au poids des nœuds) et où aucun nœud ne possède un poids trop conséquent, la norme du graphe obtenu en moyennant le poids des arêtes sur chaque élément de la partition est L^p bornée. Cette définition doit être quelque peu remaniée lorsque p est infini. L'inégalité à vérifier est alors

$$\max_{1 \leq i,j \leq m} \left| \frac{\rho_G(V_i, V_j)}{\|G\|_1} \right| \leq C.$$

Notons également que pour p égal à 1, cette définition n'est plus très pertinente car $C = 1$ convient et l'inégalité est toujours vérifiée. Enfin, nous pouvons faire remarquer que la condition (2.1) est assez raisonnable, la majorité des graphes creux la vérifient. Nous n'avons d'ailleurs pas trouvé de contre-exemple. Donnons cependant un exemple de graphe régulier L^p supérieur. Celui-ci est quelque peu tiré de l'exemple 12 de [BCCH18].

Exemple 2.1.1. Prenons la suite de graphes (G_n) suivant Erdős-Rényi et de probabilité $n^{\alpha-1}$ pour $\alpha \in]0, 1[$. Considérons le cas simple où chaque nœud est de poids 1 et chaque arête de poids $n^{\alpha-1}$. Fixons un n et montrons que ce graphe G est régulier (C, η) - L^p supérieur pour un bon choix de C et η .

Nous pouvons voir assez facilement que $\eta = \frac{1}{n}$ convient pour les conditions

- $\forall i \in V(G), \alpha_i \leq \eta \alpha_G$, puisque $\alpha_i = 1$ et $\alpha_G = n$,
- pour toute partition $(V_j)_1^m$ de $V(G)$, $\alpha_{V_j} \geq \eta \alpha_G$, puisque $\alpha_{V_j} = |V_j| \geq 1$.

Et tout η supérieur à cette valeur conserve les conditions. La seule différence est que la condition (2.1) ne doit pas être vérifiée pour toute partition mais uniquement pour celles où $\alpha_{V_j} \geq \eta \alpha_G$ pour tout j .

Calculons maintenant $\sum_{i,j=1}^m \frac{\alpha_{V_i} \alpha_{V_j}}{\alpha_G^2} \left| \frac{\rho_G(V_i, V_j)}{\|G\|_1} \right|^p$ pour un p fixé.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^m \frac{\alpha_{V_i} \alpha_{V_j}}{\alpha_G^2} \left| \frac{\rho_G(V_i, V_j)}{\|G\|_1} \right|^p &= \sum_{i,j=1}^m \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \left| \frac{\sum_{k \in V_i, l \in V_j} \frac{1}{|V_i| |V_j|} n^{\alpha-1}}{\sum_{k,l} \frac{1}{n^2} n^{\alpha-1}} \right|^p \\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \left| \frac{|V_i| |V_j| \frac{1}{|V_i| |V_j|} n^{\alpha-1}}{n^2 \frac{1}{n^2} n^{\alpha-1}} \right|^p \\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} 1^p \\
&= \sum_i |V_i| \sum_j \frac{|V_j|}{n^2} \\
&= \sum_i |V_i| \frac{1}{n} \text{ car partition de } V(G) \\
&= 1 \\
&\leq 1^p
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout p et pour C égal à 1, nous avons que G est régulier (C, η) - L^p supérieur.

Cette notion présentée, nous pouvons maintenant nous occuper du problème de convergence d'une suite de graphes vers un graphon. La propriété suivante nous donne la condition à satisfaire. Les valeurs de C et de η seront discutées dans la section 2.2.

Propriété - convergence d'une suite de graphes —

Une suite (G_n) de graphes réguliers L^p supérieurs converge vers un L^p -graphon.

2.1.1 Construction d'un graphon à partir d'un graphe

Attardons-nous sur la façon d'obtenir un graphon à partir d'un graphe creux. Ce graphon est noté W_G pour rappeler comment il a été obtenu. Il est construit en deux étapes :

1. Nous divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $|V(G)|$ intervalles I_i , $1 \leq i \leq |V(G)|$, de longueur $\lambda(I_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_G}$ où λ est la mesure de Lebesgue.
2. Le graphon W_G vaut β_{ij} sur le rectangle $I_i \times I_j$, $i, j \in \{1, \dots, |V(G)|\}$.

Par exemple, considérons le graphe 2.2. Nous avons en noir, le nom du nœud, en bleu, le poids de l'arête et en vert, le poids du nœud. En suivant la démarche décrite ci-dessus, nous obtenons le graphon 2.3. Les rectangles blancs correspondent à des valeurs nulles.

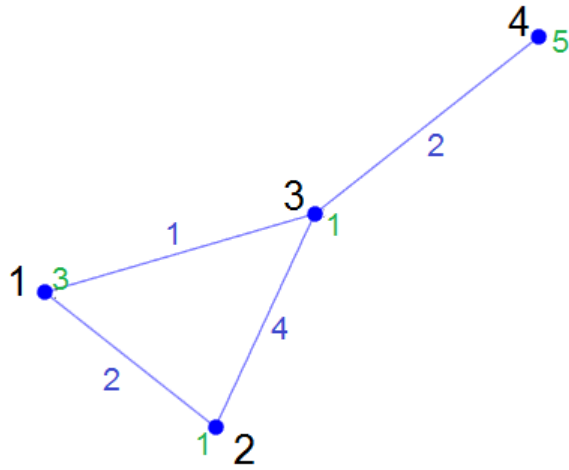


FIGURE 2.2 – Exemple de graphe pondéré

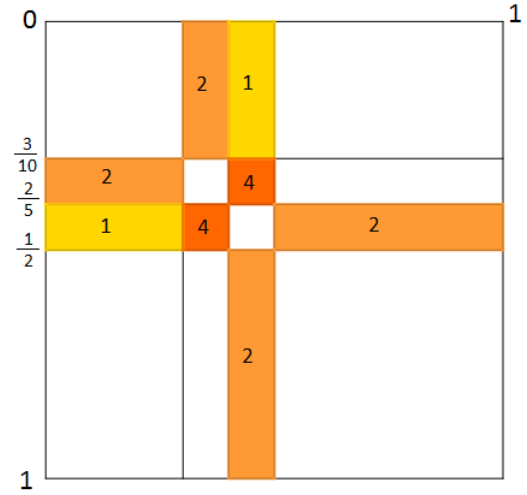


FIGURE 2.3 – Graphon correspondant au graphe 2.2

Nous avons avec ce graphon la propriété assez intéressante que $\|W^G\|_p = \|G\|_p$ quelque soit $p \in [1, \infty]$.

Dans cette théorie des limites de graphes creux, nous ne regardons pas la convergence de W_{G_n} vers un graphon W car celui-ci est identiquement nul, nous nous intéressons en fait à la convergence de $\frac{W_{G_n}}{\|G_n\|_1}$. Pour ce faire, nous devons définir des termes supplémentaires. Le premier est l'opérateur de moyennisation.

Définition - opérateur de moyennisation

Soient $W : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un graphon et $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ une partition de I en sous-ensembles Borel-mesurables. Alors, l'opérateur de moyennisation permet d'obtenir $W_{\mathcal{P}} : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier définie comme $W_{\mathcal{P}}(x, y) = \frac{1}{\lambda(J_i)\lambda(J_j)} \int_{J_i \times J_j} W d\lambda$, pour tout $x, y \in J_i \times J_j$.

Cet opérateur est une contraction dans le sens des normes. Autrement dit, nous avons

$$\|W_{\mathcal{P}}\|_{\square} \leq \|W\|_{\square} \text{ et } \|W_{\mathcal{P}}\|_p \leq \|W\|_p \text{ pour tout } p \in [1, \infty].$$

Avec cette définition, nous pouvons écrire autrement la notion de graphe régulier L^p -supérieur.

Définition - graphe régulier L^p -supérieur (2^{ème})

Soient $(V_j)_1^m$ une partition de $V(G)$ et $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ où J_i est le sous-ensemble de $[0, 1]$ correspondant à V_i , en d'autres termes $J_i = \bigcup_{v \in V_i} I_v$ (I_v étant construit ci-dessus).

Alors, on a la condition (2.1) si et seulement si

$$\|(W^G)_{\mathcal{P}}\|_p \leq C \|G\|_1$$

Nous pouvons étendre cette notion à un graphon, nous définissons ainsi un graphon régulier L^p supérieur.

Définition - graphon régulier L^p supérieur

Un graphon $W : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est régulier (C, η) - L^p supérieur si pour toute partition \mathcal{P} de $[0, 1]$ en sous-ensembles mesurables de mesure plus grande ou égale à η , on a

$$\|W_{\mathcal{P}}\|_p \leq C.$$

Nous nous sommes demandés s'il existait des implications entre graphon et graphe régulier (C, η) - L^p supérieur. Il s'avère que nous ne sommes assurés de n'avoir que le sens graphon vers graphe [BCCZ14], exprimé comme

$$\begin{aligned} \frac{W_G}{\|G\|_1} \text{ graphon régulier } (C, \eta) - L^p \text{ supérieur et une partition de } I \\ \text{telle que } \alpha_i \leq \eta \alpha_G \\ \Rightarrow G \text{ graphe régulier } (C, \eta) - L^p \text{ supérieur.} \end{aligned}$$

Les normes et distances qui ont été présentées à la section peuvent être reprises pour les graphes creux. Présentons maintenant les définitions supplémentaires et modifiées dans le cadre de la théorie L^p des graphes creux :

- Soient $W, W' : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $1 \leq p \leq \infty$, alors nous définissons $d_p(W, W') = \|W - W'\|_p$ et $\delta_p(W, W') = \inf_{\sigma} d_p(W^{\sigma}, W')$.
- Soient G, G' deux graphes ayant les mêmes nœuds (c'est-à-dire $V(G) = V(G')$) et les mêmes poids sur ces nœuds, nous définissons

$$d_{\square}(G, G') = d_{\square}(W_G, W_{G'}) = \max_{S, T \subseteq V(G)} \left| \sum_{i \in S, j \in T} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_G^2} (\beta_{ij}(G) - \beta_{ij}(G')) \right|.$$

- La notion de cut-metric normalisée se définit comme $\delta_{\square}(\frac{G}{\|G\|_1}, \frac{G'}{\|G'\|_1})$ et est régulièrement utilisée car, comme montré précédemment, la théorie L^p pour les graphes creux sous-entend une normalisation du graphe.

Nous remarquons ainsi que les définitions sont très ressemblantes à celles décrites dans la théorie des graphes denses. De plus, il est possible de comparer deux objets de types différents que sont un graphe et un graphon grâce à la construction du graphon W_G à partir d'un graphe G .

Nous sommes dans l'optique de voir comment un graphe peut être approximé par un graphon et pour ce faire, nous avons besoin de définir la suite de graphes avec laquelle nous travaillons.

Définition - suite de graphes régulière L^p supérieure

Soient $p \in]1, \infty]$ et $C > 0$. Une suite de graphes $(G_n)_{n \geq 0}$ est dite régulière $C - L^p$ supérieure si pour tout $\eta > 0$ il existe $n_0(\eta) \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \geq n_0(\eta)$, G_n est régulier $(C + \eta, \eta) - L^p$ supérieur.

Une définition analogue peut être faite sur des graphons. Nous pouvons faire remarquer que le degré moyen dans une suite de graphes simples régulière $C - L^p$ supérieure doit tendre vers l'infini [BCCZ14]. Cela confirme bien le besoin d'une théorie plus robuste que celle de Bollobás-Riordan. Continuons l'exemple 2.1.1. Nous considérons ici la suite de graphes et nous montrons qu'elle est régulière L^p supérieure. Soit $\eta > 0$. En prenant, $n_0(\eta) = \frac{1}{\eta}$, nous avons $\forall n \geq n_0$, G_n est régulier $(1 + \eta, \eta) - L^p$ supérieur puisque $\eta = \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{n}$ et la condition (2.1) est vérifié pour 1 et donc également pour $1 + \eta$.

2.1.2 Construction d'un graphe creux à partir d'un graphon

Ce point nous permet de construire un graphe creux W -aléatoire à partir d'un graphon W et ce graphe nous sera utile dans le prochain point qui concerne la convergence de suites de graphes creux.

Soit W un graphon. Définissons $\mathbf{H}(\mathbf{n}, \mathbf{W})$, un graphe à n nœuds (labellisés par $\{1, \dots, n\} = \underline{n}$ avec tous les poids valant 1) construit de la façon suivante : soient x_1, \dots, x_n variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.) choisies uniformément dans $[0, 1]$. Nous assignons le poids des arêtes β_{ij} comme étant égal à $W(x_i, x_j)$ pour tout i, j différents dans \underline{n} .

Redémarrons de $\mathbf{H}(\mathbf{n}, \mathbf{W})$, prenons $\rho > 0$ et définissons $\mathbf{G}(\mathbf{W}, \rho) = \mathbf{G}(\mathbf{H}(\mathbf{n}, \mathbf{W}), \rho)$, graphe à n nœuds. Avec β_{ij} de signe quelconque, $\mathbf{G}(\mathbf{H}, \rho)$ a comme ensemble de nœuds $V(H)$ et ij est une arête (de poids égal à 1 ou -1) avec une probabilité de $\min\{\rho|\beta_{ij}|, 1\}$ (le poids est de 1 si $\beta_{ij} > 0$ et -1 sinon) et ce de façon indépendante pour tout $i, j \in E(H)$.

Lorsque nous combinons ces deux étapes, nous obtenons $\mathbf{G}(\mathbf{H}(\mathbf{n}, \mathbf{W}), \rho)$ qui est un graphe creux W -aléatoire. Notons que le graphe obtenu est à poids et signé. L'utilisation de poids négatifs est assez rare puisque cela entraîne des limitations algorithmiques (certains algorithmes tels que Dijkstra ne fonctionnent plus [FV12]) et le type de graphes engendré n'est que peu utile. Nous considérons en pratique des graphes, à poids éventuellement mais non signés. Signalons également que $\mathbf{H}(\mathbf{n}, \mathbf{W})$ et $\mathbf{G}(\mathbf{H}, \rho)$ peuvent également être considérés comme des graphons si nous réalisons ensuite la construction d'un graphon à partir d'un graphe creux expliquée au point précédent.

2.2 Convergences

Après s'être attardé sur la manière de définir un graphon et sur les conditions à respecter pour qu'une suite de graphes creux soit convergente, nous pouvons maintenant, comme cela a été fait avec les graphes denses, aborder les théorèmes importants sur la convergence de suites de graphes. Dans [BCCZ14] à la page 12, le schéma, qui est repris dans la figure 2.4, résume de façon assez intéressante les différentes relations qui peuvent être établies entre les graphes et les graphons. Donnons les théorèmes qui établissent chacune des flèches de la figure 2.4, les nombres associés aux flèches correspondant aux numéros de théorèmes. Ceux-ci sont énoncés et démontrés dans [BCCZ14].

Théorème 2.2.1. *Soient $1 < p \leq \infty$, $C > 0$ et $(W_n)_n$ une suite de graphons L^p avec $\|W_n\|_p \leq C \forall n$. Alors, il existe W , un graphon L^p , tel que $\|W\|_p \leq C$ et*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_{\square}(W_n, W) = 0.$$

Théorème 2.2.2. *Soit $1 < p \leq \infty$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout graphe G régulier $(C, \eta) - L^p$ supérieur, il existe W , un graphon L^p , vérifiant $\|W\|_p \leq C$ tel que*

$$\delta_{\square}\left(\frac{G}{\|G\|_1}, W\right) \leq C\epsilon.$$

Théorème 2.2.3. *Soient $1 < p \leq \infty$, (G_n) une suite de graphes réguliers $C - L^p$ supérieurs. Alors, il existe W , un graphon L^p , tel que $\|W\|_p \leq C$ et*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_{\square}\left(\frac{G_n}{\|G_n\|_1}, W\right) = 0.$$

Théorème 2.2.4. *Soit W un graphon L^1 . On a $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(H(n, W), W) = 0$, avec une probabilité de 1.*

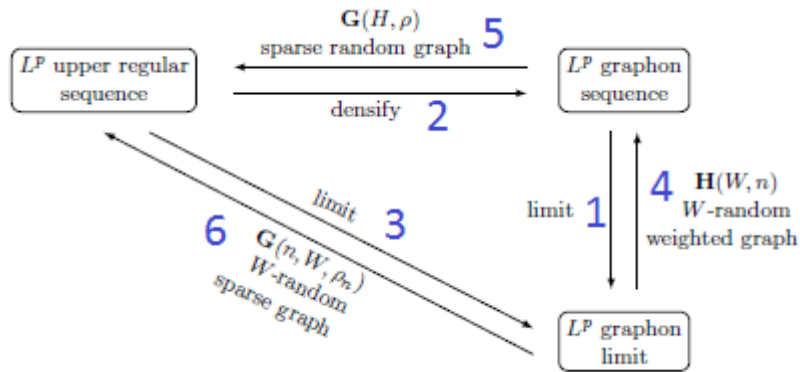


FIGURE 2.4 – Schéma résumant les relations et les théorèmes entre suites de graphes et graphons (figure 2.1 de [BCCZ14])

Théorème 2.2.5. *Soit une suite (ρ_n) telle que $\rho_n > 0$ pour tout n , $\rho_n \rightarrow 0$ et $n\rho_n \rightarrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini. Pour chaque n , prenons H_n un graphe de n nœuds de poids 1 et ne contenant pas de boucle. Supposons que $\|H_n\|_1$ est borné uniformément et que les poids d'arêtes satisfont à*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max\{|\beta_{ij}(H_n)| - \frac{1}{\rho_n}, 0\} = 0.$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\square} \left(\frac{\mathbf{G}(\mathbf{H}_n, \rho_n)}{\rho_n}, H_n \right) = 0$ avec une probabilité de 1.

Théorème 2.2.6. *Soit W un graphon L^1 . Si une suite (ρ_n) telle que $\rho_n > 0$ pour tout n satisfait à $\rho_n \rightarrow 0$ et $n\rho_n \rightarrow \infty$ lorsque n tend vers l'infini, alors, avec probabilité 1,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\square} \left(\frac{\mathbf{G}(\mathbf{W}, \rho_n)}{\rho_n}, W \right) = 0.$$

Finissons l'exemple 2.1.1 par montrer quel est le graphon de cette suite de graphes et par utiliser un des théorèmes qui vient d'être énoncé pour prouver la convergence de la suite de graphes vers ce graphon. Nous utilisons le théorème 2.2.3. Calculons tout d'abord $\frac{G}{\|G\|_1}$. Nous savons que $\|G\|_1$ est égal à $n^{\alpha-1}$ et chaque arête de G a un poids de $n^{\alpha-1}$. Par conséquent, le graphe obtenu est le graphe complet où chaque arête est de poids 1. Revenons à la théorie des graphons pour graphes denses, nous trouvons alors que la fonction constante $W = 1$ est le graphe limite de cette suite et par conséquent que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_{\square} \left(\frac{G_n}{\|G_n\|_1}, W \right) = 0$. La norme p de W est bien inférieure à $C = 1$ pour tout p , le théorème est donc vérifié.

Chapitre 3

Dynamique de réaction-diffusion sur réseau et instabilité de Turing

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la dynamique sur réseau et plus particulièrement à une dynamique de réaction-diffusion. Tout d'abord, nous présentons comment cette dynamique s'écrit et se définit sur un réseau mais également sur un graphon. Nous discutons quelque peu de la forme des conditions initiales mais surtout de la manière dont nous pouvons faire le lien entre les équations de dynamique sur réseau et l'équation de dynamique sur le graphon correspondant. Ensuite, nous présentons les deux théorèmes centraux de la suite de ce mémoire, théorèmes que nous démontrons. Le premier nous assure de l'existence d'une solution pour la dynamique sur graphon et le second nous affirme la convergence de la solution sur réseau vers la solution sur graphon et donne une borne sur la vitesse de convergence. Afin de montrer la force de ce résultat, nous présentons différents exemples, en une dimension puis en deux, via plusieurs conditions initiales et plusieurs graphons différents. Nous nous contentons de travailler avec des graphes denses. En effet, le cas graphe creux peut être assimilé à la démarche via graphes denses avec l'unique différence que le graphon obtenu n'est pas nécessairement borné mais est au moins L^1 [KVM17]. Enfin, nous nous intéressons à la détermination de la structure propre de l'opérateur graphon et cette structure nous permet de discuter la stabilité des équilibres de la réaction-diffusion. Étant donné que nous nous plaçons parfois dans les conditions suffisantes pour avoir une instabilité de Turing, nous pouvons appuyer les figures montrées lors des exemples par la démonstration théorique de l'instabilité de la dynamique.

3.1 Dynamique sur réseau et via un graphon

Dans cette section, nous allons présenter comment s'exprime une dynamique sur réseau et comment cette dynamique peut être adaptée afin de travailler avec un graphon et une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Ces deux dynamiques seront comparées dans une section suivante, le but étant de savoir si la solution des équations définies sur le réseau converge, tandis que n tend vers l'infini, vers la solution de l'équation définie via le graphon.

Nous avons d'un côté un graphe de n nœuds sur lequel il y a une dynamique de réaction-diffusion décrite par un ensemble d'EDO (équations (3.1)) et de l'autre une dynamique construite via le graphon correspondant W , décrite par une EDP (équation (3.2)). Le terme $u_i^{(n)}$ est la variable considérée sur le nœud i . La fonction D des équations (3.1) et (3.2) est Lipschitz continue ainsi que la fonction de réaction f par rapport à la variable u et cette fonction f est également continue en t . Le terme avec la somme correspond à un terme de couplage non local. Si la fonction D est linéaire et correspond à un opérateur de dérivée seconde, alors la somme dans les équations (3.1) représente la diffusion de la dynamique. La fonction W de l'équation (3.2) est le graphon trouvé à partir du graphe des équations (3.1).

Il faudrait arriver à montrer que, lorsque le nombre de nœuds tend vers l'infini, la solution des EDO tend vers la solution de l'EDP. Pour ce faire, nous allons passer par une EDP intermédiaire qui a comme variable une fonction en escalier $u_n(t, x)$ qui dépend du nombre de nœuds du graphe. Ce système va représenter la dynamique sur le graphe étendue à un intervalle continu. En d'autres termes, $u_n(t, x) = u_i^{(n)}(t)$ si $x \in I_i^{(n)}$, les intervalles $I_i^{(n)}$ étant définis dans la section 1.1. Nous démarrons de l'équation (3.2) et nous considérons la condition initiale $u(0, x) = g(x)$, g étant une fonction bornée sur I . La condition initiale des équations (3.1) est construite comme les valeurs moyennes sur un petit intervalle afin de coller au mieux à la CI de l'équation (3.2) (la bornitude de g permettra une bonne approximation dans la plupart des cas), en d'autres termes,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} = \underline{n}, \quad u_i^{(n)}(0) = g_i^{(n)} = n \int_{I_i^{(n)}} g(x) dx,$$

$$\text{où } \begin{cases} I_i^{(n)} &= \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right[& \text{pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ I_n^{(n)} &= \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right]. \end{cases}$$

L'équation intermédiaire est alors de la forme (3.3). La condition initiale de cette équation intermédiaire est la fonction en escalier dont les paliers sont définis sur les $I_i^{(n)}$ et l'image est $g_i^{(n)}$. La fonction \hat{W}_n est une fonction en escalier et est définie pour $(x, y) \in I_i^{(n)} \times I_j^{(n)}$, $(i, j) \in \underline{n}^2$ comme (W^+ étant le support de W)

$$\hat{W}_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|I_i^{(n)}| |I_j^{(n)}|} \int_{I_i^{(n)} \times I_j^{(n)}} W(r, s) dr ds & \text{si } (I_i^{(n)} \times I_j^{(n)}) \cap W^+ \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} u_i^{(n)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j: (i, j) \in E(G_n)} D(u_j^{(n)} - u_i^{(n)}) + f(t, u^{(n)}) \quad (3.1)$$

$$\text{avec } u_i^{(n)}(0) = g_i^{(n)} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \int_I W(x, y) D(u(t, y) - u(t, x)) dy + f(t, u(t, x)) \quad (3.2)$$

$$\text{avec } u(0, x) = g(x).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x) = \int_I \hat{W}_n(x, y) D(u_n(t, y) - u_n(t, x)) dy + f(t, u_n(t, x)) \quad (3.3)$$

$$\text{avec } u_n(0, x) = g_n(x) = g_i^{(n)} \text{ si } x \in I_i^{(n)}.$$

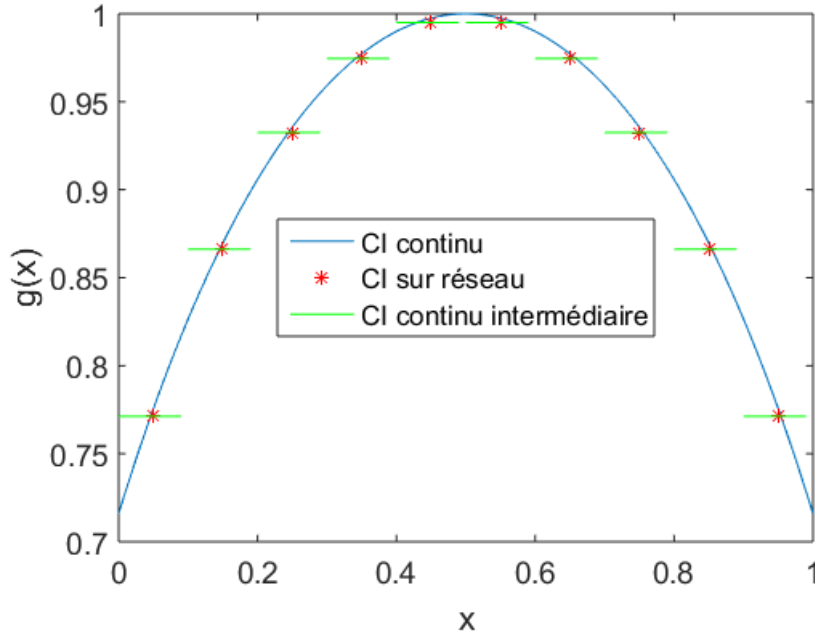


FIGURE 3.1 – Exemples de condition initiale pour les équations (3.1), (3.2) et (3.3)

Visuellement, nous avons par exemple les conditions initiales de la figure 3.1 pour les équations (3.1), (3.2) et (3.3) (nous avons choisi $g(x) = 2 - e^{(x-\frac{1}{2})^2}$ et $n = 10$).

3.2 Théorèmes d'existence, d'unicité et de convergence

Nous devons dans un premier temps nous assurer que l'EDP (3.2) définie avec le graphe W possède bien une solution. Sinon, cela n'aurait pas de sens de tenter de comparer les solutions obtenues sur le graphe et par la dynamique de l'équation (3.2). Le théorème 3.2.1 établit cela. Par notation, nous utilisons \mathbf{u} (en gras) pour signifier que c'est le mapping défini sur $[0, T]$ et à valeur dans $L^\infty(I)$ tel que $\mathbf{u}(t) = u(\cdot, t)$, pour $t \in [0, T]$.

Théorème 3.2.1. *Supposons que D est Lipschitz continue (de constante L), f Lipschitz continue par rapport à \mathbf{u} (de constante N), $W \in L^\infty(I^2)$ et $g \in L^\infty(I)$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une unique solution de l'équation (3.2) $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}; L^\infty(I))$ sous la condition initiale $\mathbf{u}(0) = g$.*

Démonstration. Cette démonstration est fortement inspirée de celle présentée dans [Med14a], l'adaptation vient du rajout du terme de réaction.

Définissons l'opérateur intégral K tel que la solution que nous cherchons vérifie $\mathbf{u} = K\mathbf{u}$ (écriture intégrale de l'EDP (3.2)). Ce K est défini comme

$$[K\mathbf{u}](x, t) = g(t) + \int_0^t \int_I W(x, y) D(u(y, s) - u(x, s)) dy ds + \int_0^t f(s, u(s, x)) ds.$$

Si nous prouvons que K est une contraction, nous pourrons utiliser le théorème des contractions qui nous assure de l'existence et de l'unicité d'une solution.

En considérant M_g un sous-espace métrique de $C([0, \tau]; L^\infty(I))$ tel que $M_g = \{\text{fonctions } \mathbf{u} \text{ telles que } \mathbf{u}(0) = g\}$, τ étant positif et fixé plus tard, la solution est alors le point fixe de l'opérateur $K : M_g \rightarrow M_g$. Il faut d'abord vérifier que M_g est complet. Or, l'espace des fonctions continues muni de la norme sup est complet. De plus, si tous les termes de la suite sont des fonctions dont la condition initiale est la fonction g , la fonction limite doit absolument avoir comme condition initiale g également. Montrons donc que K est une contraction pour un τ suffisamment petit. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M_g$.

$$\begin{aligned} \|K\mathbf{u} - K\mathbf{v}\|_{M_g} &\stackrel{\text{déf}}{=} \max_{t \in [0, \tau]} \|K\mathbf{u}(t) - K\mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq \max_{t \in [0, \tau]} \sup_{x \in I} \left[\int_{I \times [0, t]} |W(x, y)| |D(u(y, s) - u(x, s)) - D(v(y, s) - v(x, s))| dy ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{[0, t]} |f(s, u) - f(s, v)| ds \right] \\ &\leq \max_{t \in [0, \tau]} \sup_{x \in I} \left[L \int_{I \times [0, t]} \max_{\theta, \chi \in I} |W(\theta, \chi)| |(\underline{u(y, s)} - \underline{u(x, s)}) - (\underline{v(y, s)} - \underline{v(x, s)})| dy ds \right. \\ &\quad \left. + N \int_{[0, t]} |u(x, s) - v(x, s)| ds \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &\leq \tau \max_{t \in [0, \tau]} \left[L \|W\|_{L^\infty(I^2)} \left\{ \int_I |u(y, t) - v(y, t)| dy + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \right\} + N \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \right] \\ &\leq \tau \max_{t \in [0, \tau]} \left[L \|W\|_{L^\infty(I^2)} \left\{ \int_I \max_{r \in I} |u(r, t) - v(r, t)| dy + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \right\} \right] + N \tau \max_{t \in [0, \tau]} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq \tau L \|W\|_{L^\infty(I^2)} \max_{t \in [0, \tau]} [\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)}] + N \tau \max_{t \in [0, \tau]} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \\ &= (2\tau L \|W\|_{L^\infty(I^2)} + N\tau) \max_{t \in [0, \tau]} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(I)} \\ &= (2\tau L \|W\|_{L^\infty(I^2)} + N\tau) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{M_g}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

l'inégalité (3.4) venant des continuités Lipschitz de D et f et nous avons l'inégalité (3.5) par

$$\max_{t \in [0, \tau]} \int_0^t |f(s)| ds = \int_0^\tau |f(s)| ds \leq \int_0^\tau \max_{r \in [0, \tau]} |f(r)| ds = \tau \max_{r \in [0, \tau]} |f(r)|.$$

Afin de s'assurer que ce soit une contraction, le coefficient devant $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{M_g}$ dans l'équation 3.6 peut être choisi égal à $\frac{1}{2}$, en d'autres termes nous avons

$$(2\tau L \|W\|_{L^\infty(I^2)} + N\tau) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau = (4L \|W\|_{L^\infty(I^2)} + 2N)^{-1}.$$

Pour tout τ inférieur ou égal à cette valeur, K est bien une contraction et par le théorème des contractions, il existe une solution unique $\tilde{\mathbf{u}}$ sur $[0, \tau]$. En prenant comme condition initiale $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)$, nous pouvons répéter le schéma de preuve et ainsi étendre cette solution unique sur $[0, 2\tau]$. En remarquant que K est un opérateur intégral continu car il est la somme de 3 fonctions continues en \mathbf{u} , cela implique que \mathbf{u} est continument différentiable. En effet, si nous dérivons $K\mathbf{u} = \mathbf{u}^1$, ce qui est possible puisque K est continu, nous obtenons $\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$. Nous avons ainsi une fonction continue égale à sa dérivée, cette fonction est alors continument différentiable. En procédant de façon récursive sur les intervalles, nous obtenons finalement une solution unique sur I . \square

Nous avons donc l'assurance qu'il existe une solution unique à l'équation aux dérivées partielles (3.2), ce qui nous certifie que nous pouvons comparer la solution sur le réseau avec la solution avec le graphon. La prochaine étape est de vérifier que la solution des équations (3.1) converge bien vers la solution de l'équation (3.2) quand le nombre de nœuds tend vers l'infini. Cependant, afin de pouvoir effectivement comparer ces solutions, nous devons en fait vérifier que la solution de l'équation (3.3) (qui est une réécriture des EDO (3.1) sur l'intervalle $[0, 1]$) converge bien vers la solution de l'EDP (3.2). Le théorème 3.2.2 nous apporte cette certitude.

Théorème 3.2.2. *Soient \mathbf{u} et \mathbf{u}_n dénotant les solutions des équations (3.2) et (3.3). Dénотons la dimension de Minkowsky-Bouligand [MIN] de la frontière de W , notée ∂W^+ , par $2b$ et supposons que $b \in [0, 1)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout n suffisamment grand, on a*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_{C(0,T;L^2(I))} \leq C_1 \left(n^{-(1-b-\epsilon)} + \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_n\|_{L^2(I)} \right), \quad (3.7)$$

où la constante C_1 est indépendante de n .

Remarquons que ce théorème est très large puisqu'il est valable pour tout ϵ positif. Or, pour tout $\epsilon \geq 1 - b$, l'exposant de n est positif et par conséquent nous n'avons pas nécessairement la convergence de la solution des équations (3.1) vers la solution de l'équation (3.2). Cependant, ϵ est lié à une approximation de la dimension fractale de ∂W^+ , il n'y a donc pas d'intérêt de prendre ϵ grand. Faisons également remarquer que, si la fonction g est très irrégulière, il se pourrait que la norme $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_n\|$ soit grande et par conséquent nous ne pourrions à nouveau pas conclure nécessairement à la convergence de \mathbf{u}_n vers \mathbf{u} . Par contre, si g est une fonction en escalier, alors la norme est de l'ordre de n^{-1} et la convergence est assurée.

1. Par dérivée, nous entendons la définition de différentiabilité d'un mapping [Jia11], c'est-à-dire : Soit U un sous-ensemble ouvert non vide de \mathbb{R}^k . Un mapping u de U vers \mathbb{R}^m est dit différentiable en un point a de U s'il existe un mapping linéaire v , noté $\delta u : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|u(x) - u(a) - v(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Démonstration. Cette démonstration est fortement inspirée de celle présentée dans [Med14a], l'adaptation vient du rajout du terme de réaction.

Définissons $\zeta_n(x, t) = u_n(x, t) - u(x, t)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} &= \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= \underbrace{\int_I \hat{W}_n(x, y) D(u_n(y, t) - u_n(x, t)) dy + f(t, u_n)}_{\text{}} - \underbrace{\int_I W(x, y) D(u(y, t) - u(x, t)) dy}_{\text{}} - f(t, u) \\
&\quad + \underbrace{\int_I \hat{W}_n(x, y) D(u(y, t) - u(x, t)) dy}_{\text{}} - \underbrace{\int_I \hat{W}_n(x, y) D(u(y, t) - u(x, t)) dy}_{\text{}} \\
&= \int_I \hat{W}_n(x, y) \{D(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D(u(y, t) - u(x, t))\} dy \\
&\quad + \int_I (\hat{W}_n(x, y) - W(x, y)) D(u(y, t) - u(x, t)) dy + f(t, u_n) - f(t, u).
\end{aligned}$$

Après multiplication des deux membres de l'égalité par $\zeta_n(x, t)$ et intégration sur I , nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_I \frac{\partial}{\partial t} \zeta_n(x, t)^2 dx &= \int_{I^2} \hat{W}_n(x, y) \{D(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D(u(y, t) - u(x, t))\} \zeta_n(x, t) dx dy \\
&+ \int_{I^2} (\hat{W}_n(x, y) - W(x, y)) D(u(y, t) - u(x, t)) \zeta_n(x, t) dx dy + \int_I (f(t, u_n) - f(t, u)) \zeta_n(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Le premier terme du membre de droite peut être majoré comme

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{I^2} \hat{W}_n(x, y) \{D(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D(u(y, t) - u(x, t))\} \zeta_n(x, t) dx dy \right| \\
&\leq \int_{I^2} \left| \hat{W}_n(x, y) \{D(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D(u(y, t) - u(x, t))\} \zeta_n(x, t) \right| dx dy \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{I^2} \max_{\theta, \chi \in I} \left| \hat{W}_n(\theta, \chi) \right| L |u_n(y, t) - u_n(x, t) - u(y, t) + u(x, t)| |\zeta_n(x, t)| dx dy \tag{3.10}$$

$$\leq L \int_{I^2} |\zeta_n(y, t) - \zeta_n(x, t)| |\zeta_n(x, t)| dx dy \tag{3.11}$$

$$\leq 2L \int_{I^2} \max \{|\zeta_n(y, t)|, |\zeta_n(x, t)|\} |\zeta_n(x, t)| dx dy \leq 2L \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2, \tag{3.12}$$

l'inégalité (3.9) venant de l'inégalité triangulaire, l'inégalité (3.10) par la continuité Lipschitz de D et l'inégalité (3.11) par le fait que $\hat{W}_n : I^2 \rightarrow I$ donc $\max_{\theta, \chi \in I} \left| \hat{W}_n(\theta, \chi) \right|$ est inférieur ou égal à 1.

Enfin, l'inégalité (3.12) est obtenue par le raisonnement suivant :

— Si $|\zeta_n(y, t)| \geq |\zeta_n(x, t)|$, alors

$$\begin{aligned} \int_{I^2} \max \{ |\zeta_n(y, t)|, |\zeta_n(x, t)| \} |\zeta_n(x, t)| \, dx dy &\leq \int_{I^2} |\zeta_n(y, t)| \cdot |\zeta_n(x, t)| \, dx dy \\ &\leq \int_{I^2} |\zeta_n(y, t)|^2 \, dx dy \\ &\leq 1 \cdot \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 \end{aligned}$$

— Si $|\zeta_n(y, t)| \leq |\zeta_n(x, t)|$, alors

$$\begin{aligned} \int_{I^2} \max \{ |\zeta_n(y, t)|, |\zeta_n(x, t)| \} |\zeta_n(x, t)| \, dx dy &\leq \int_{I^2} |\zeta_n(x, t)| \cdot |\zeta_n(x, t)| \, dx dy \\ &\leq 1 \cdot \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 \end{aligned}$$

Le deuxième terme est lui majoré par

$$\begin{aligned} &\left| \int_{I^2} \left(\hat{W}_n(x, y) - W(x, y) \right) D(u(y, t) - u(x, t)) \zeta_n(x, t) \, dx dy \right| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{(x, y, t) \in I^2 \times [0, T]} |D(u(y, t) - u(x, t))| \int_{I^2} \left| \hat{W}_n(x, y) - W(x, y) \right| |\zeta_n(x, t)| \, dx dy \\ &\leq C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} \end{aligned}$$

où C_2 est indépendant de n et nous avons utilisé l'inégalité $\|\zeta_n(t)\|_{L^1(I)} \leq \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}$ qui est vérifiée car la mesure de l'espace est de 1. En effet, le théorème 3.2.3 des inclusions des espaces L^p [Har] nous donne cette inégalité entre les normes.

Théorème 3.2.3. *Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. Si $\mu(X) < \infty$, alors*

$$L^p \subset L^r \subset L^1 \forall 1 \leq r \leq p.$$

De plus,

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p (\mu(X))^s \quad \forall f \in L^p, \quad \text{où } s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}.$$

En particulier, si $\mu(X) = 1$, alors

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p.$$

Le troisième terme contenant les termes de réaction est quant à lui majoré par

$$\begin{aligned} \left| \int_I (f(t, u_n) - f(t, u)) \zeta_n(x, t) \, dx \right| &\leq \int_I |f(t, u_n) - f(t, u)| |\zeta_n(x, t)| \, dx \\ &\leq \int_I N |u_n(x, t) - u(x, t)| |\zeta_n(x, t)| \, dx \quad (3.13) \\ &\leq N \int_I |\zeta_n(x, t)|^2 \, dx \\ &\leq N \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2, \end{aligned}$$

où l'inégalité (3.13) vient de la continuité Lipschitz de f par rapport à son deuxième argument.

Nous obtenons à partir de l'inéquation (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq 4L \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 + 2C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} + 2N \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq (4L + 2N) \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 + 2C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire fixé et posons $\xi_\epsilon(t) = \sqrt{\|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 + \epsilon}$. L'inéquation (3.14) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\xi_\epsilon(t)^2 - \epsilon) &\leq (4L + 2N) (\xi_\epsilon(t)^2 - \epsilon) + 2C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \sqrt{\xi_\epsilon(t)^2 - \epsilon} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \xi_\epsilon(t)^2 &\leq (4L + 2N) \xi_\epsilon(t)^2 + 2C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \xi_\epsilon(t). \end{aligned}$$

Puisque $2\xi_\epsilon \dot{\xi}_\epsilon$ est la dérivée de ξ_ϵ^2 et étant donné que cette fonction ξ_ϵ est positive sur $[0, T]$, nous pouvons diviser les deux membres par $\xi_\epsilon(t)$. Nous avons

$$\frac{d}{dt} \xi_\epsilon(t) \leq (2L + N) \xi_\epsilon(t) + C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}. \quad (3.15)$$

Nous allons nous servir de l'inégalité de Gronwall qui exprime que

$$\text{si } \frac{d\Psi(t)}{dt} \leq \psi(t)\Psi(t), \text{ alors } \Psi(t) \leq \Psi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \psi(s) ds} \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (3.16)$$

Nous allons quelque peu modifier l'inégalité (3.15) afin d'avoir la forme voulue. Nous avons

$$\frac{d}{dt} \left(\xi_\epsilon(t) + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right) \leq (2L + N) \left\{ \xi_\epsilon(t) + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right\}.$$

Par Gronwall,

$$\begin{aligned} \xi_\epsilon(t) + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} &\leq \left(\xi_\epsilon(0) + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right) e^{\int_0^t (2L + N) ds} \quad \forall 0 \leq t \leq T \\ \Rightarrow \xi_\epsilon(t) &\leq \left(\xi_\epsilon(0) + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right) e^{\int_0^t (2L + N) ds} \quad \forall 0 \leq t \leq T \\ \Rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \xi_\epsilon(t) &\leq \left(\xi_\epsilon(0) + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right) e^{(2L + N)T}. \end{aligned}$$

En se ramenant à la variable ζ_n , nous avons, ϵ étant positif,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} \leq \left(\|g - g_n\|_{L^2(I)} + \frac{C_2 \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right) e^{(2L + N)T}. \quad (3.17)$$

Estimons la valeur $\|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}$. Nous allons pour ce faire considérer les cases $I_i^{(n)} \times I_j^{(n)}$ qui couvrent la frontière du support de W et définir

$$J(n) = \{(i, j) \in [n]^2 : (I_i^{(n)} \times I_j^{(n)}) \cap \partial W^+ \neq \emptyset\},$$

$$\text{et } C(n) = |J(n)|.$$

La dimension de Minkowski-Bouligand (box-counting) peut être écrite comme

$$2b = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\partial W^+)}{-\log \delta},$$

$N_\delta(\partial W^+)$ étant le nombre de cases de taille $\delta \times \delta$ qui intersectent la frontière de W . De par la dimension fractale de ∂W^+ , nous pouvons donner une limite supérieure à $C(n)$, nous avons ($C(n)$ étant assimilé à $N_\delta(\partial W^+)$ et $\frac{1}{n}$ à δ)

$$2b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(C(n))}{-\log(n^{-1})}.$$

Par définition de la limite supérieure, nous avons

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\epsilon, \frac{\log(C(n))}{\log(n)} \leq 2(b + \epsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\epsilon, \log(C(n)) \leq \log(n^{2(b+\epsilon)})$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\epsilon, C(n) \leq n^{2(b+\epsilon)}.$$

Lorsque nous regardons W et \hat{W}_n , nous savons que pour tous les couples (i, j) tq $(I_i^{(n)} \times I_j^{(n)})$ n'est pas intersecté par ∂W^+ , c'est-à-dire pour tous les $(i, j) \notin J(n)$, ces deux graphons coïncident en moyenne sur la surface $(I_i^{(n)} \times I_j^{(n)})$. Nous pouvons donc écrire

$$\|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}^2 = \int_{I^2} (W - \hat{W}_n)^2 dx dy \leq \underbrace{C(n)}_{\# \text{cases}} \underbrace{n^{-2}}_{\text{taille case}} \leq n^{-2(1-b-\epsilon)}. \quad (3.18)$$

En rassemblant les inégalités (3.17) et (3.18), nous avons

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} \leq \left(\|g - g_n\|_{L^2(I)} + \frac{C_2 n^{-(1-b-\epsilon)}}{2L + N} \right) e^{(2L+N)T}.$$

En choisissant $C_1 = e^{(2L+N)T} \max\{1, \frac{C_2}{2L+N}\}$, nous obtenons l'inégalité (3.7) voulue. \square

Étant donné que nous travaillons souvent en 2 dimensions, c'est-à-dire avec deux variables pouvant représenter deux espèces, nous devons également établir cette démonstration en 2 dimensions.

Démonstration. Définissons $\zeta_n(x, t) = \begin{pmatrix} u_n(x, t) - u(x, t) \\ v_n(x, t) - v(x, t) \end{pmatrix}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\int_I \hat{W}_n(x, y) D_u(u_n(y, t) - u_n(x, t)) dy + f_u(t, u_n, v_n) - \int_I W(x, y) D_u(u(y, t) - u(x, t)) dy}{-f_u(t, u, v) + \int_I \hat{W}_n(x, y) D_u(u(y, t) - u(x, t)) dy - \int_I \hat{W}_n(x, y) D_u(u(y, t) - u(x, t)) dy} \\ \frac{\int_I \hat{W}_n(x, y) D_v(v_n(y, t) - v_n(x, t)) dy + f_v(t, u_n, v_n) - \int_I W(x, y) D_v(v(y, t) - v(x, t)) dy}{-f_v(t, u, v) + \int_I \hat{W}_n(x, y) D_v(v(y, t) - v(x, t)) dy - \int_I \hat{W}_n(x, y) D_v(v(y, t) - v(x, t)) dy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_I \hat{W}_n(x, y) \{D_u(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D_u(u(y, t) - u(x, t))\} dy \\ + \int_I (\hat{W}_n(x, y) - W(x, y)) D_u(u(y, t) - u(x, t)) dy + f_u(t, u_n, v_n) - f_u(t, u, v) \\ \int_I \hat{W}_n(x, y) \{D_v(v_n(y, t) - v_n(x, t)) - D_v(v(y, t) - v(x, t))\} dy \\ + \int_I (\hat{W}_n(x, y) - W(x, y)) D_v(v(y, t) - v(x, t)) dy + f_v(t, u_n, v_n) - f_v(t, u, v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Effectuons un produit scalaire des deux membres de l'égalité par $\zeta_n(x, t)$ et intégrons sur I , nous avons

$$\frac{1}{2} \int_I \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_n(x, t) \cdot \zeta_n(x, t)) dx =$$

$$\int_{I^2} \hat{W}_n(x, y) \{D_u(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D_u(u(y, t) - u(x, t))\} (u_n(x, t) - u(x, t)) dx dy \quad (3.19)$$

$$+ \int_{I^2} (\hat{W}_n(x, y) - W(x, y)) D_u(u(y, t) - u(x, t)) (u_n(x, t) - u(x, t)) dx dy \quad (3.20)$$

$$+ \int_I (f_u(t, u_n, v_n) - f_u(t, u, v)) (u_n(x, t) - u(x, t)) dx \quad (3.21)$$

$$+ \int_{I^2} \hat{W}_n(x, y) \{D_v(v_n(y, t) - v_n(x, t)) - D_v(v(y, t) - v(x, t))\} (v_n(x, t) - v(x, t)) dx dy \quad (3.22)$$

$$+ \int_{I^2} (\hat{W}_n(x, y) - W(x, y)) D_v(v(y, t) - v(x, t)) (v_n(x, t) - v(x, t)) dx dy \quad (3.23)$$

$$+ \int_I (f_v(t, u_n, v_n) - f_v(t, u, v)) (v_n(x, t) - v(x, t)) dx. \quad (3.24)$$

Avec les mêmes arguments que la démonstration en une dimension, le terme (3.19) (et (3.22) de façon similaire) peut être majoré comme

$$\int_{I^2} \hat{W}_n(x, y) \{D_u(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D_u(u(y, t) - u(x, t))\} (u_n(x, t) - u(x, t)) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{I^2} \left| \hat{W}_n(x, y) \right| \left\{ D_u(u_n(y, t) - u_n(x, t)) - D_u(u(y, t) - u(x, t)) \right\} |u_n(x, t) - u(x, t)| dx dy \\
&\leq \int_{I^2} \max_{\theta, \chi \in I} \left| \hat{W}_n(\theta, \chi) \right| L_u |u_n(y, t) - u_n(x, t) - u(y, t) + u(x, t)| |u_n(x, t) - u(x, t)| dx dy \\
&\leq L_u \int_{I^2} |(u_n(y, t) - u(y, t)) - (u_n(x, t) - u(x, t))| |u_n(x, t) - u(x, t)| dx dy \\
&\leq L_u \int_{I^2} \|\zeta_n(y, t) - \zeta_n(x, t)\|_2 \|\zeta_n(x, t)\|_2 dx dy \\
&\leq 2L_u \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

l'inégalité (3.25) venant de

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |u_1| \leq \|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Le terme (3.20) (et (3.23) de façon similaire) est lui majoré par

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{I^2} \left(\hat{W}_n(x, y) - W(x, y) \right) D_u(u(y, t) - u(x, t)) (u_n(x, t) - u(x, t)) dx dy \right| \\
&\leq \operatorname{ess\,sup}_{(x, y, t) \in I^2 \times [0, T]} |D_u(u(y, t) - u(x, t))| \int_{I^2} \left| \hat{W}_n(x, y) - W(x, y) \right| |u_n(x, t) - u(x, t)| dx dy \\
&\leq C_u \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

où C_u est indépendant de n et est lié à l'ess sup (pour le terme (3.23), nous majorons avec une variable nommée C_v).

Le terme (3.21) (conjointement le terme (3.24)) est quant à lui majoré par

$$\begin{aligned}
&\left| \int_I (f_u(t, u_n, v_n) - f_u(t, u, v)) (u_n(x, t) - u(x, t)) dx \right| \\
&\leq \int_I |f_u(t, u_n, v_n) - f_u(t, u, v)| |u_n(x, t) - u(x, t)| dx \\
&\leq \int_I \left| \underbrace{f_u(t, u_n, v_n)} - \underbrace{f_u(t, u, v)} - \underbrace{f_u(t, u_n, v)} + \underbrace{f_u(t, u_n, v)} \right| |u_n(x, t) - u(x, t)| dx \\
&\leq \int_I (N_u |u_n(x, t) - u(x, t)| + N_v |v_n(x, t) - v(x, t)|) |u_n(x, t) - u(x, t)| dx \tag{3.26} \\
&\leq N_u \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 + N_v \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 \tag{3.27} \\
&= (N_u + N_v) \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2,
\end{aligned}$$

où l'inégalité (3.26) vient de la continuité Lipschitz de f par rapport à son deuxième argument et troisième argument, l'inégalité (3.27) venant de l'inégalité

$$|uv| \leq 2|uv| \leq (u^2 + v^2).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq 4(L_u + L_v) \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 + 2(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} + 4(N_u + N_v) \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 &\leq 4(L_u + L_v + N_u + N_v) \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2 + 2(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

De la même manière qu'en dimension 1, prenons un $\epsilon > 0$ arbitraire fixé et posons $\xi_\epsilon(t) = \sqrt{\|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)}^2} + \epsilon$. L'inéquation devient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\xi_\epsilon(t)^2 - \epsilon) &\leq 4(L_u + L_v + N_u + N_v) (\xi_\epsilon(t)^2 - \epsilon) + 2(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \sqrt{\xi_\epsilon(t)^2 - \epsilon} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \xi_\epsilon(t)^2 &\leq 4(L_u + L_v + N_u + N_v) \xi_\epsilon(t)^2 + 2(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)} \xi_\epsilon(t). \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $\xi_\epsilon(t)$ qui est toujours strictement positif, nous avons

$$\frac{d}{dt} \xi_\epsilon(t) \leq 2(L_u + L_v + N_u + N_v) \xi_\epsilon(t) + (C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}.$$

Afin d'utiliser l'inégalité de Gronwall (3.16), réécrivons l'équation comme

$$\frac{d}{dt} \left(\xi_\epsilon(t) + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2(L_u + L_v + N_u + N_v)} \right) \leq 2(L_u + L_v + N_u + N_v) \left\{ \xi_\epsilon(t) + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2(L_u + L_v + N_u + N_v)} \right\}.$$

Nous avons alors, en posant $L_C = 2(L_u + L_v + N_u + N_v)$,

$$\begin{aligned} \xi_\epsilon(t) + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{L_C} &\leq \left(\xi_\epsilon(0) + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{L_C} \right) e^{\int_0^t L_C ds} \quad \forall 0 \leq t \leq T \\ \Rightarrow \xi_\epsilon(t) &\leq \left(\xi_\epsilon(0) + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{L_C} \right) e^{\int_0^t L_C ds} \quad \forall 0 \leq t \leq T \\ \Rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \xi_\epsilon(t) &\leq \left(\xi_\epsilon(0) + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{L_C} \right) e^{L_C T}. \end{aligned}$$

En se ramenant à la variable ζ_n , nous avons, ϵ étant positif et les conditions initiales étant écrites comme

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \begin{pmatrix} g_u(x, t) \\ g_v(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } g_n = \begin{pmatrix} g_{u_n}(x, t) \\ g_{v_n}(x, t) \end{pmatrix}, \\ \sup_{t \in [0, T]} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} &\leq \left(\|g - g_n\|_{L^2(I)} + \frac{(C_u + C_v) \|W - \hat{W}_n\|_{L^2(I^2)}}{2L + N} \right) e^{(2L + N)T}. \end{aligned}$$

Par un cheminement similaire que lors de la démonstration en 1 dimension, nous obtenons

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\zeta_n(t)\|_{L^2(I)} \leq \left(\|g - g_n\|_{L^2(I)} + \frac{(C_u + C_v) n^{-(1-b-\epsilon)}}{L_C} \right) e^{L_C T}.$$

En choisissant $C_1 = e^{2(L_u + L_v + N_u + N_v)T} \max\{1, \frac{C_u + C_v}{2(L_u + L_v + N_u + N_v)}\}$, nous obtenons l'inégalité (3.7) voulue. \square

Ce théorème nous donne ainsi la certitude que travailler avec le graphon est suffisant pour représenter la dynamique sur le réseau. Tachons de montrer des exemples en une dimension. C'est l'objet de la section suivante.

3.3 Réaction-diffusion pour une espèce

Nous allons donc considérer à ce niveau-ci du travail une espèce dont les individus se déplacent sur le réseau et interagissant selon la réaction suivante :

$$f(u) = u \left(\frac{1}{2} - u \right) (u - 1).$$

Il s'agit d'un terme de réaction bistable puisque 0 et 1 sont tout deux des équilibres stables tandis que $\frac{1}{2}$ est un équilibre instable. En considérant quatre conditions initiales différentes, en intégrant par défaut de 0 à 20 par pas de 0.01, en prenant 200 nœuds et le graphe construit grâce à l'algorithme de la section 1.1 pour la dynamique sur réseau, nous obtenons les graphes suivants : figure 3.2 pour CI1 $g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$, figure 3.3 pour CI2 $g(x) = \frac{x^2}{4}$, figure 3.4 pour CI3 $g(x) = 1 - x$ et figure 3.5 pour CI4 $g(x) = x$. Nous remarquons que dans les quatre cas la courbe continue semble donner le même comportement que lorsque la dynamique sur réseau est considérée. Dans le cas des figures 3.4 et 3.5, il nous a fallu intégrer jusqu'à 50 pour atteindre le nouvel état stable.

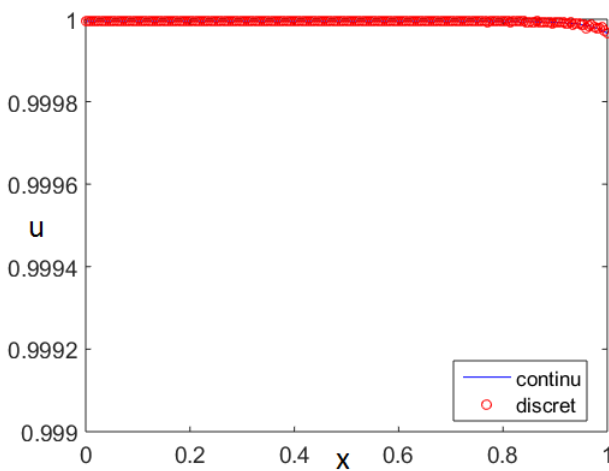


FIGURE 3.2 – Solutions de l'espèce u en $t = 20$ (CI1, $n = 200$, graphon (1.2))

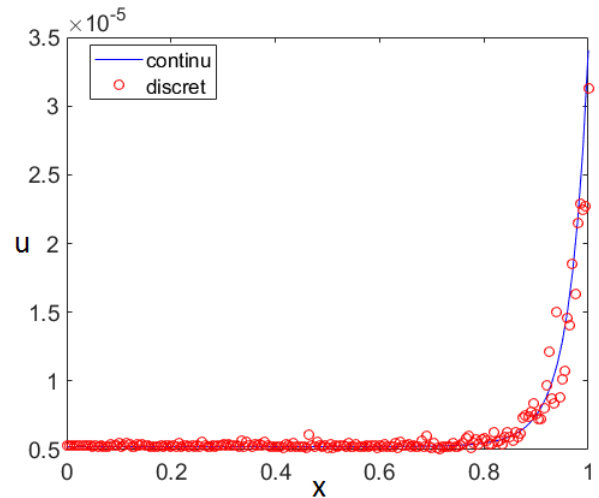


FIGURE 3.3 – Solutions de l'espèce u en $t = 20$ (CI2, $n = 200$, graphon (1.2))

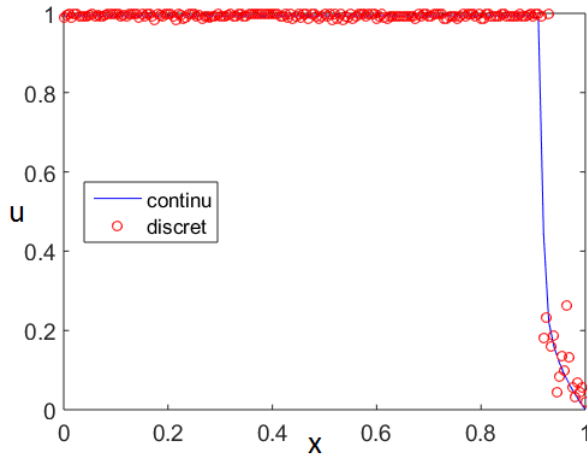


FIGURE 3.4 – Solutions de l'espèce u en $t = 50$ (CI3, $n = 200$, graphon (1.2))

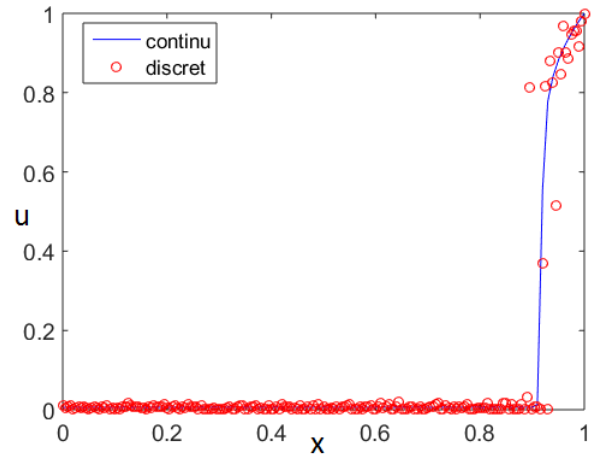


FIGURE 3.5 – Solutions de l'espèce u en $t = 50$ (CI4, $n = 200$, graphon (1.2))

Lorsque nous regardons comment la norme de la différence entre les deux solutions évolue pendant l'intégration, nous avons la figure 3.6 qui nous montre qu'au fur et à mesure de l'intégration la norme augmente. Cela est certainement lié à l'accumulation d'erreurs dues à l'erreur d'approximation de la condition initiale des EDO (3.1) par rapport à la condition initiale de l'EDP (3.2). Comme dans cet exemple-ci, la solution ne converge pas vers l'équilibre homogène, il paraît cohérent que l'erreur d'approximation s'amplifie avec le déséquilibre de la dynamique. En pratique cette norme est calculée pour un temps t comme

$$\|u(x_i, t) - u_n^i(t)\|_2 \text{ où } x_i = \frac{i}{n}.$$

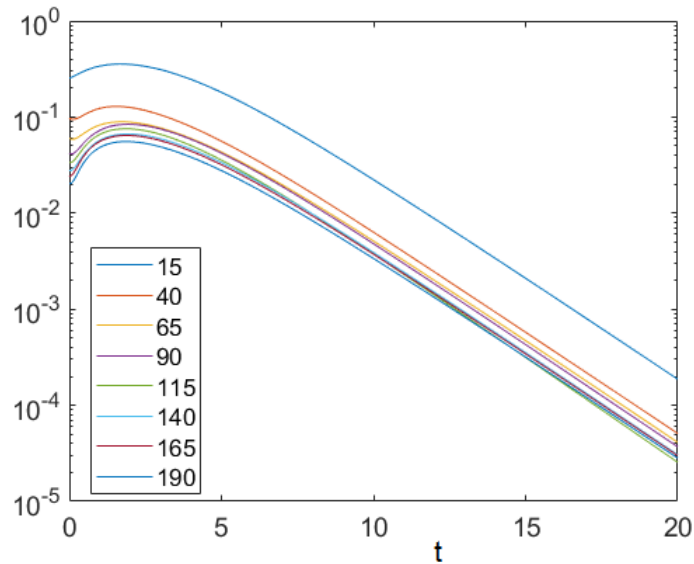


FIGURE 3.6 – Norme de la différence à travers le temps (CI1, $n = 200$, graphon (1.2))

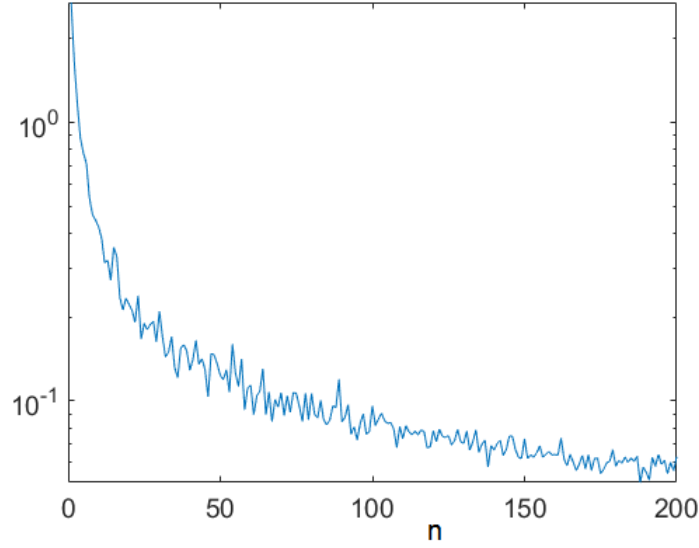


FIGURE 3.7 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI1, graphon (1.2))

Nous pouvons également regarder quelle est la norme maximale de la différence sur l'intégration complète et afficher cette norme pour n augmentant. Nous avons la figure 3.7 qui nous montre que le théorème 3.2.2 est effectivement vérifié dans le cas scalaire puisque cette norme maximale converge vers 0 avec n tendant vers l'infini. Les courbes de la figure 3.6 montrent cette même idée de convergence de la norme maximale sur le temps de la différence et montre en plus que cette norme est même inférieure sur tout l'intervalle de temps pour un n plus grand. En pratique, cette norme est calculée pour un n comme

$$\max_{t \in [0, t_{max}]} \|u(x_i, t) - u_n^i(t)\|_2.$$

Intéressons-nous également à la dimension fractale de la frontière du graphon (1.2). En essayant d'approximer cette dimension, nous obtenons le graphe 3.8. Cette dimension fractale a été calculée comme le logarithme du nombre de fois que, lors de la lecture en ligne et en colonne de la matrice d'adjacence, nous passons de 0 à 1 ou inversement, le tout divisé par $\log(n)$. Cela nous permet de conclure que $2b \simeq 1.94$ et donc la vitesse de convergence des solutions est d'au moins $n^{-0.03}$. Il s'agit donc d'une borne supérieure peu contraignante puisque cela n'empêche pas les solutions de converger lentement l'une vers l'autre. En effet, si les solutions convergeaient avec ce taux de -0.03 , il faudrait de l'ordre de 10^{33} fois plus de nœuds pour diminuer d'un dixième la norme de la différence entre les solutions. Par exemple, nous avons pour $n = 10^{33}$

$$(10^{33})^{-0.03} \simeq 0,1$$

et pour $n = 10^{66}$

$$(10^{66})^{-0.03} \simeq 0,01.$$

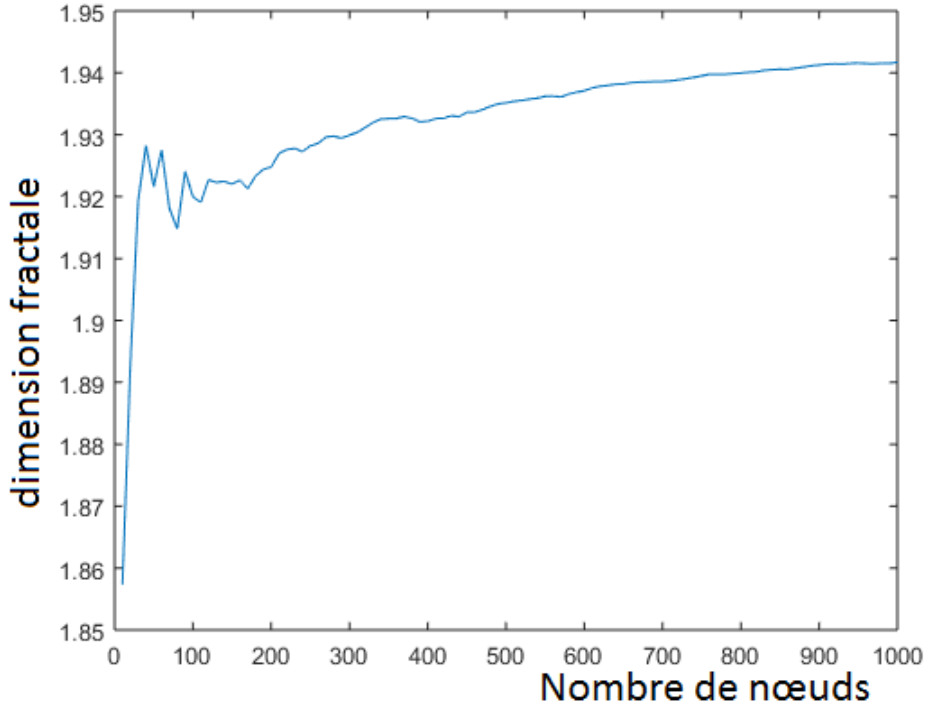


FIGURE 3.8 – Approximation de la dimension fractale de la frontière du graphon (1.2)

3.4 Réaction-diffusion pour deux espèces

Dans ce point nous allons donner des exemples qui utilisent le théorème 3.2.2, prenant en considération deux espèces. Nous verrons que la dynamique sur graphe converge effectivement pour un nombre de nœuds grandissant vers la dynamique sur graphon. Nous commencerons par définir le modèle considéré et les différents graphons et conditions initiales dont nous nous servirons. En prenant un jeu de paramètres entrainant une instabilité de Turing, nous étudierons alors les différentes convergences et comportements de ces dynamiques avec les graphons présentés et les différentes conditions initiales utilisées. Enfin, nous nous attarderons sur l'étude de stabilité des équilibres du système, de la recherche des valeurs propres, fonctions propres d'un graphon et les difficultés rencontrées pour trouver ces informations.

Nous avons choisi comme fonction de réaction le modèle du Brusselator, modèle théorique décrivant une réaction autocatalytique, c'est-à-dire dont un des produits accélère et active la réaction [AH03]. Ces fonctions sont sur le nœud i :

$$\begin{cases} f(u_i, v_i) &= 1 - (b + 1)u_i + cu_i^2v_i \\ g(u_i, v_i) &= bu_i - cu_i^2v_i \end{cases}$$

En fonction des valeurs de b et c , nous rencontrerons différents cas de figure et par conséquent différents comportements pour les deux espèces [Muo17]. Les paramètres seront fixés de sorte à avoir une instabilité de Turing. En étudiant la dynamique du Brusselator, nous avons un unique équilibre, en $(1, \frac{b}{c})$, qui sera stable si $b < c + 1$ et instable

sinon. Dans ce mémoire, nous avons considéré les valeurs pour b et c de $b = 4$ et $c = 6$ basées sur les informations trouvées dans [Muo17]. Nous sommes ainsi dans le cas d'un équilibre stable pour la réaction.

A cette réaction entre les deux espèces, nous y ajoutons un effet de diffusion par le déplacement des deux espèces sur le réseau considéré, qui peut être vu comme un individu qui se déplace vers un nœud afin de réduire l'écart entre les nœuds. Nous obtenons comme équations de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \dot{u}_i &= \sum_j L(i, j)u_j + 1 - (b + 1)u_i + cu_i^2v_i \\ \dot{v}_i &= \sum_j L(i, j)v_j + bu_i - cu_i^2v_i \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

où L est la matrice laplacienne du réseau. C'est cette dynamique qui va être étudiée dans les points suivants, via d'un côté la théorie des graphes et dynamique sur réseau et de l'autre la dynamique sur graphon et les équations aux dérivées partielles correspondantes. Avec le choix des paramètres fait juste avant, nous rencontrons effectivement une instabilité de Turing en considérant la dynamique réaction-diffusion. Une instabilité de Turing est pour rappel un passage d'équilibres stables pour la partie réaction vers des équilibres instables pour la dynamique complète de réaction-diffusion.

3.4.1 Graphons

Afin de comparer et d'étudier les vitesses de convergences et l'efficacité de la théorie des graphons en termes d'approximation des solutions, nous avons considéré différentes constructions de graphes, par conséquent plusieurs graphons. Le premier est celui qui a déjà été présenté précédemment, entre autres via la présentation de l'algorithme de construction de la suite de graphes à la table 1.1. Il a été trouvé dans l'article [BCL⁺11]. Ce graphon consistait en la fonction

$$W(x, y) = 1 - \max(x, y) \quad \forall x, y \in [0, 1]. \quad (3.28)$$

Le second graphon que nous utiliserons est le plus simple graphe aléatoire, c'est-à-dire le réseau Erdős-Rényi avec une probabilité de $p = \frac{1}{2}$. Pour tous les nœuds, nous le relierons avec une probabilité constante p aux autres nœuds. Trivialement, le graphon associé sera

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \quad \forall x, y \in [0, 1]. \quad (3.29)$$

Un exemple de graphe construit via Erdős-Rényi est montré dans l'image 3.9 où le logiciel Gephi [Gep] a été utilisé. Nous voyons qu'il n'y a pas de nœud privilégié et que les nœuds ont tendance à avoir des degrés assez proches. Nous avons la confirmation de ce comportement lorsque nous affichons la distribution de degrés. En effet, nous obtenons la figure 3.10 où nous avons pris $n = 1000$ et nous avons moyenné sur 50 graphes Erdős-Rényi. Nous remarquons la forme gaussienne autour de $np = 500$.

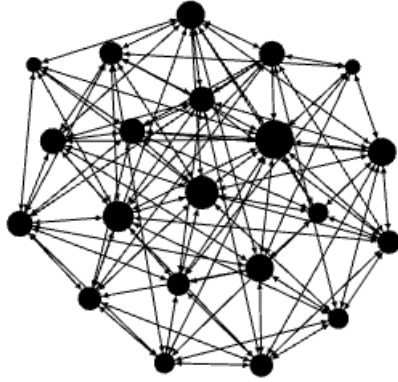


FIGURE 3.9 – Exemple de graphe construit avec Erdős-Rényi $p = \frac{1}{2}$

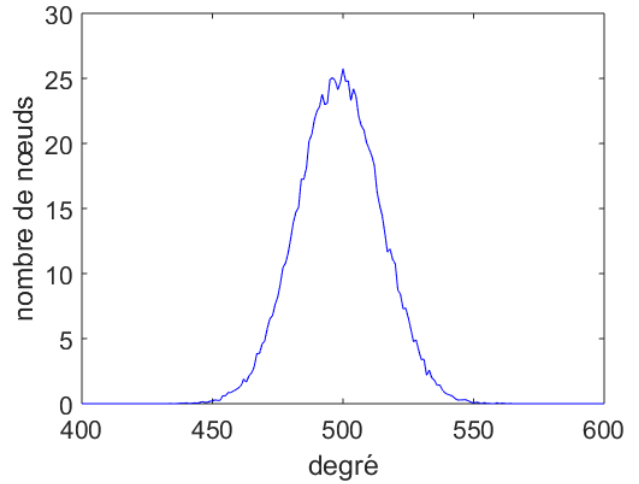


FIGURE 3.10 – Exemple de distribution de degrés pour Erdős-Rényi $p = \frac{1}{2}$

Le troisième graphon nous vient du point 3.2 de [BCL⁺11] et est associé à la suite de graphes construite via l'algorithme de la table 3.1.

TABLE 3.1 – Algorithme 2

Deuxième algorithme de construction de la suite G_n provenant de [BCL ⁺ 11] point 3.2
<u>Initialisation</u>
$1 \in V(G_1)$
$E(G_1) = \emptyset$
<u>Boucle</u>
pour i allant de 2 à tailleMax
$V(G_i) = V(G_{i-1}) \cup \{i\}$
$E(G_i) = E(G_{i-1})$
pour tout j dans $V(G) \setminus \{i\}$
$ji \in E(G_i)$ avec une proba de $1 - \frac{j}{i}$
fin boucle
pour tout $j < k$ dans $V(G) \setminus \{i\}$
si $jk \notin E(G_{i-1})$
$jk \in E(G_i)$ avec une proba de $\frac{2}{i}$
fin si
fin boucle
fin boucle

De la même manière qu'avec le graphon (3.28), nous pouvons déterminer, à partir de l'algorithme de la table 3.1 et la probabilité que deux nœuds quelconques soient connectés, la fonction continue qui constituera la graphon limite de cette suite. Il s'agit de

$$W(x, y) = 1 - xy \quad \forall x, y \in [0, 1]. \quad (3.30)$$

La figure 3.11 créée via le logiciel Gephi [Gep] nous montre un exemple de graphe qui respecte cette construction. Comme pour le graphon 1.4, nous voyons des nœuds très connectés (correspondants aux premiers nœuds ajoutés) et des nœuds plutôt secondaires en degré tout en restant un réseau connexe et ayant plus de liens.

Comme quatrième et dernier graphon, nous avons considéré la limite de réseaux construits par l'algorithme de Watts-Strogatz avec une probabilité de reconnection $p = 0$ et $p = 0.6$. Concernant le graphon limite, avant l'étape de reconnection, nous sommes en présence d'un réseau régulier où chaque sommet est relié à une fraction de nœuds de m , qui se répartissent comme $\frac{mN}{2}$ liens avec les voisins de gauche et idem pour les voisins de droite. Ce comportement se manifeste dans le graphon comme $W(x, y) = 1$ si $|x - y| \leq \frac{m}{2}$ et égal à 0 sinon. Avec les reconnections, la probabilité que les nœuds connectés soient toujours connectés est de $1 - p$ tandis que deux nœuds non connectés se connecteront avec une probabilité de p . Par conséquent, le graphon devient

$$W(x, y) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } |x - y| \leq \frac{m}{2}, \\ p & \text{si } |x - y| > \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (3.31)$$

La figure 3.12 créée via le logiciel Gephi [Gep] montre un réseau construit via Watts-Strogatz avec $p = 0$ et avec 4 voisins, ce qui correspond à un anneau régulier.

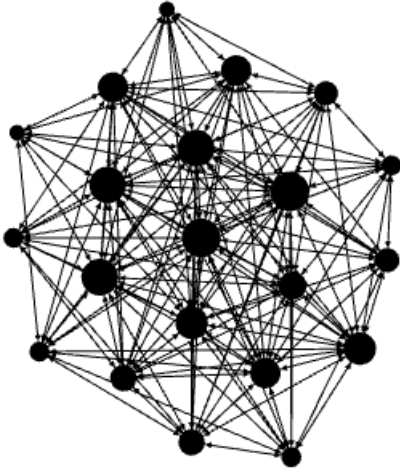


FIGURE 3.11 – Exemple de graphe construit avec le code de la table 3.1

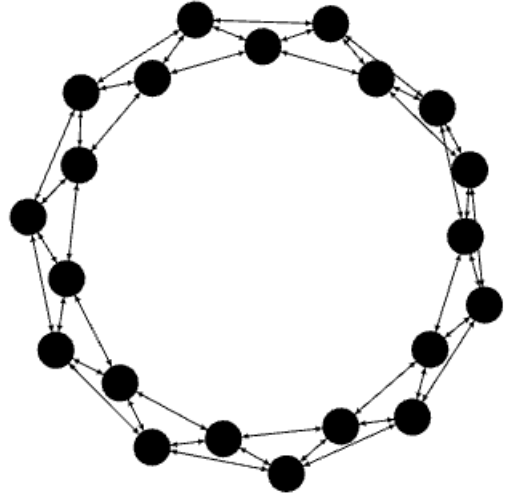


FIGURE 3.12 – Exemple de graphe construit avec WS pour $p = 0$

3.4.2 Conditions initiales

Nous avons considéré plusieurs conditions initiales afin de voir comment le type de comportement au départ transparait dans la dynamique par la suite. Une courbe lisse reste-t-elle lisse ? Une condition initiale constante par palier induira-t-elle un motif pour chaque palier ? Nous avons ainsi pris quatre conditions initiales différentes que sont

1. une fonction sinusoïdale,
2. une gaussienne,
3. une fonction constante par morceau,
4. une fonction interpolée à partir d'un ensemble de points aléatoires.

Pour chacune d'entre elles, il s'agit d'une déviation de l'équilibre $(1, \frac{2}{3})$. Visuellement, nous avons les figures 3.13, 3.14, 3.15 et 3.16 pour chacune des conditions initiales.

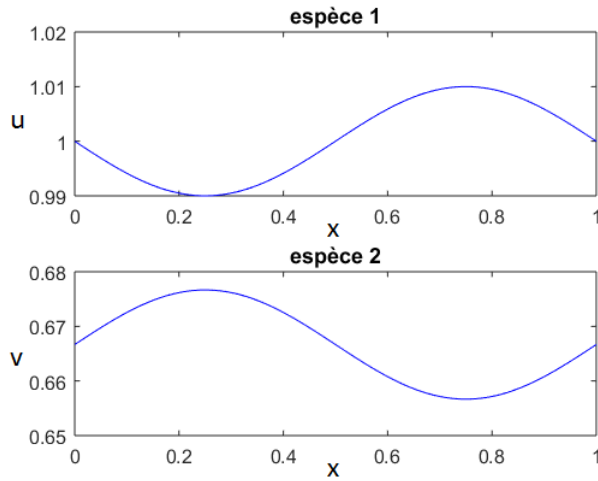


FIGURE 3.13 – CI sinusoïdale

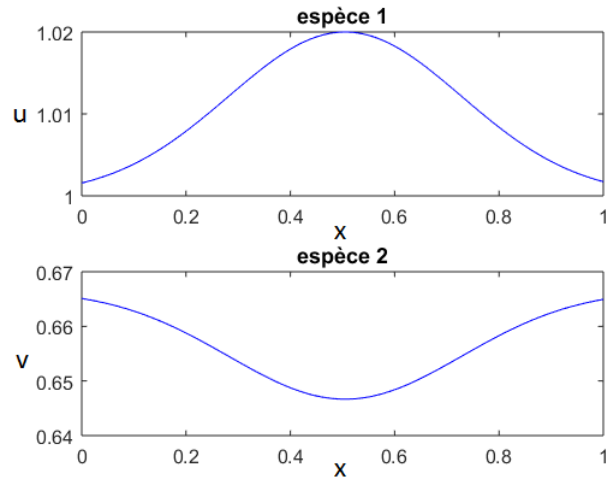


FIGURE 3.14 – CI gaussienne

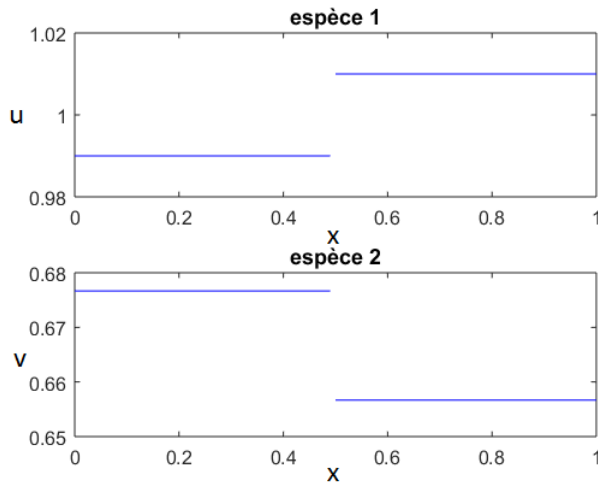


FIGURE 3.15 – CI constante par palier

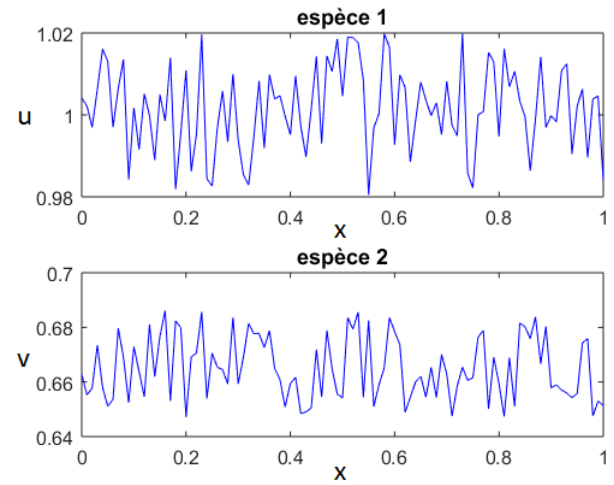


FIGURE 3.16 – CI aléatoire interpolée

3.4.3 Exemples

Nous allons dans ce point présenter plusieurs exemples afin de montrer en quoi le théorème 3.2.2 a un impact lorsqu'il est appliqué. Nous discuterons ainsi de la vitesse de convergence, des solutions, de la stabilité, etc. Ces exemples seront construits pour divers graphons, ce qui nous permettra de discuter les motifs et la vitesse de convergence, mais également de voir l'impact d'effets probabilistes sur les résultats, entre autres sur la stabilité de la dynamique. Pour chacun de ces graphons, nous avons pris les 4 conditions initiales présentées ci-avant. A nouveau, cela permettra de comparer les solutions et la vitesse de convergence.

Graphon 1

Nous commencerons ces exemples par reprendre le graphon qui nous a servi tout au long de ce travail. Il s'agit du graphon construit par l'algorithme 1.1 et est défini comme

$$W = 1 - \max(x, y). \quad (3.32)$$

Premièrement, rappelons que le graphon (3.32) est effectivement l'objet limite de la suite de graphes construite via l'algorithme 1.1. Nous avons en effet montré à l'aide de la figure 1.16 que la norme de la différence entre les deux décroissait avec n augmentant. Montrons maintenant que le théorème 3.2.2 est vérifié dans ce cas. Nous allons donc laisser la dynamique opérer durant 20 unités de temps et comparer les valeurs obtenues sur les différents nœuds via la dynamique sur graphe venant des EDO (3.1) avec la forme de la fonction obtenue avec la dynamique sur graphon venant de l'EDP (3.2). Avec une perturbation sinusoïdale de l'équilibre et n égal à 200, nous avons la figure 3.17. Nous remarquons que la fonction sur le début de l'intervalle $[0, 1]$ semble s'être légèrement déséquilibrée mais par contre que, sur la fin de l'intervalle, les deux espèces semblent rester proches de leur valeur initiale. Nous voyons également que les points rouges correspondant aux valeurs des espèces sur les nœuds du graphe suivent assez bien la courbe bleue, solution continue de la dynamique de l'équation (3.2). Ces points collent d'autant mieux dans la partie droite de l'image, là où la solution ne s'éloigne pas beaucoup de l'équilibre $(1, \frac{2}{3})$. En s'attardant sur les performances pour cet exemple, nous avons également regardé la norme de la différence entre les solutions pour $N = 200$ et nous avons identifié comment cette norme évolue à travers le temps, il s'agit de la figure 3.18. Ainsi, en prenant un plus grand nombre de nœuds, la norme s'amointrit sur la totalité de l'intervalle. Nous voyons également qu'au fur et à mesure de l'intégration, il y a une accumulation d'erreurs liées à l'approximation de la condition initiale pour le système discret.

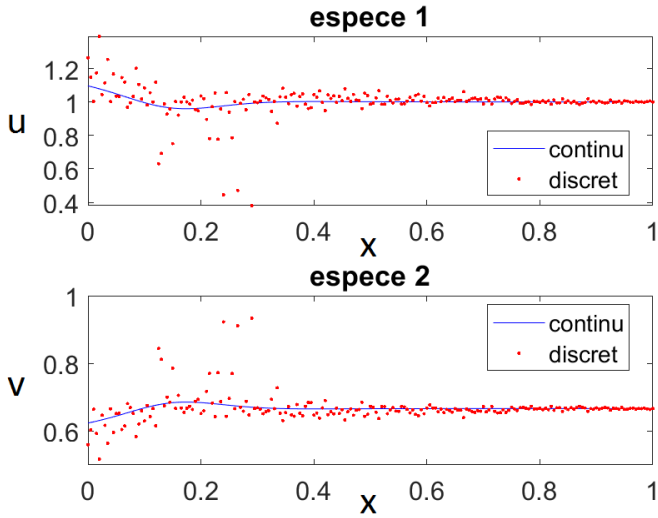


FIGURE 3.17 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.28))

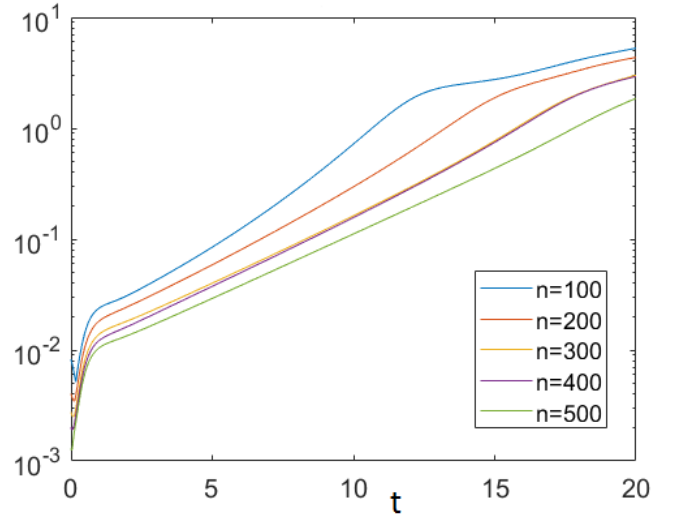


FIGURE 3.18 – Norme de la différence à travers le temps (CI sinus, $n = 200$, 2 espèces, graphon (3.28))

Enfin, nous avons gardé en mémoire la norme maximale en fonction du temps de la différence pour chaque n et la figure 3.19 communique cela. Cette figure montre que le théorème 3.2.2 est effectivement vérifié dans cet exemple étant donné que la norme décroît et semble converger vers 0. Étant donné que le graphe à 200 nœuds pris pour réaliser la figure 3.17 est une réalisation parmi tous les graphes construits par l'algorithme de la table 1.1, nous devons prendre en compte l'aspect probabiliste de la solution. Nous avons ainsi décidé de moyenner les solutions obtenues à partir de 20 exécutions de cet algorithme. Nous avons obtenu l'image 3.20. Nous remarquons que la solution des équations (3.1) concorde encore mieux avec la solution de l'équation (3.2). Cela nous conforte dans l'idée qu'une exécution unique de l'algorithme 1.1 est déjà une solution intéressante mais que prendre une moyenne de plusieurs exécutions améliore la convergence.

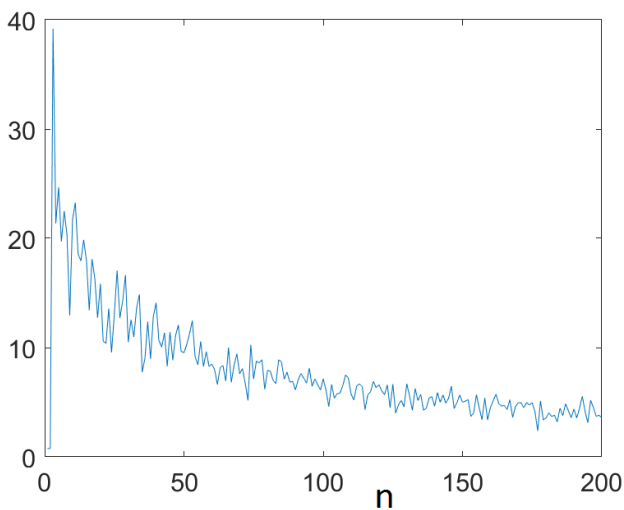


FIGURE 3.19 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ en fonction de n (CI sinus, 2 espèces, graphon (3.28))

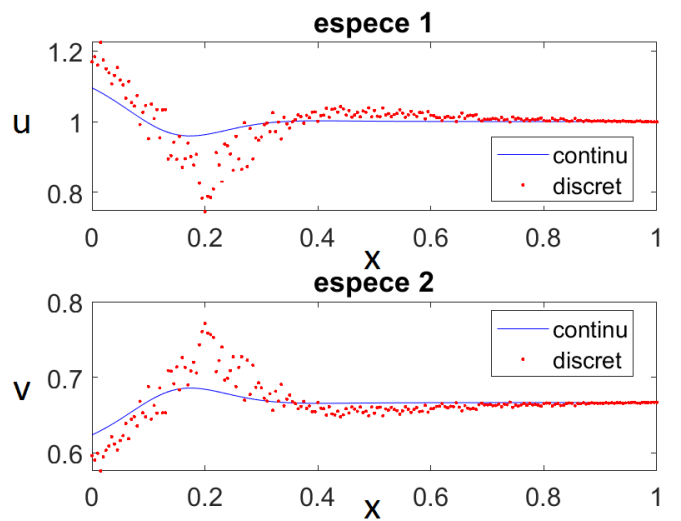


FIGURE 3.20 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.28))

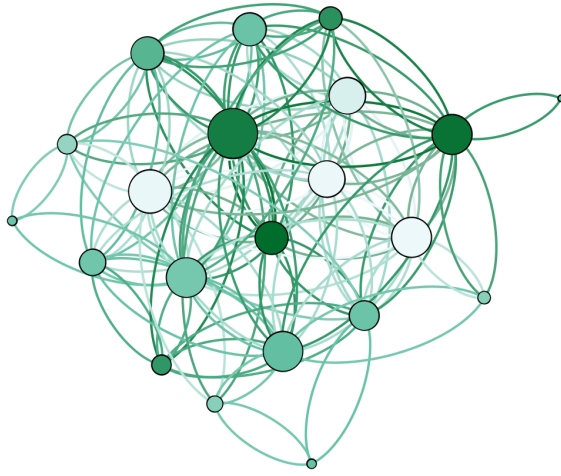


FIGURE 3.21 – Exemple de répartition de l'espèce 1 sur un réseau construit par l'algorithme de la table 1.1



FIGURE 3.22 – Exemple de répartition de l'espèce 2 sur un réseau construit par l'algorithme de la table 1.1

Visuellement, nous obtenons grâce au logiciel Gephi [Gep] le genre de situations montré dans les figures 3.21 et 3.22. La taille des nœuds représente le degré du nœud et la couleur du nœud est d'autant plus foncée que l'espèce l'habite en grande quantité. Chaque arc est représenté. Par conséquent, il y a toujours deux liens entre deux nœuds connectés. Nous voyons que les deux espèces se sont déséquilibrées et lorsqu'une espèce est en plus grande quantité sur certains sommets, l'autre espèce a quant à elle quitté ces sommets pour peupler les autres. Nous voyons ainsi des motifs grossiers apparaître.

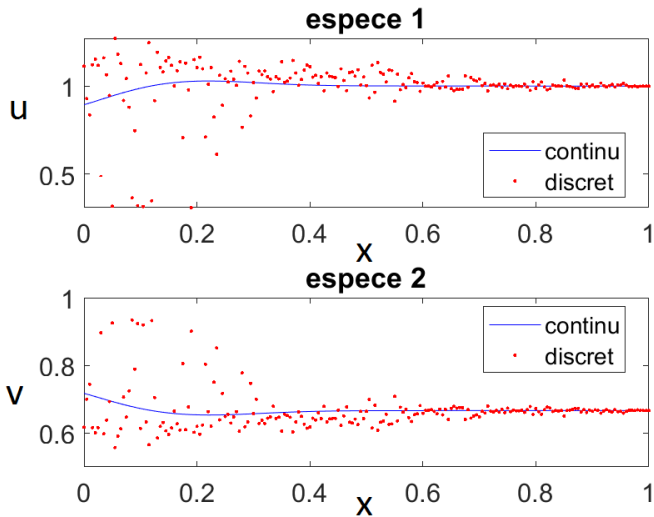


FIGURE 3.23 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.28))

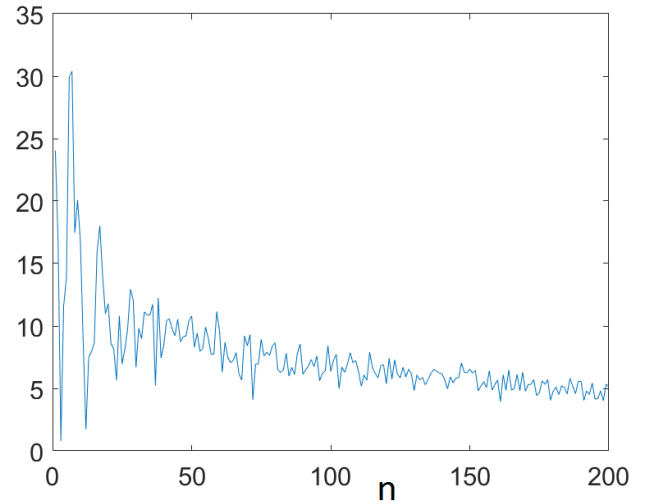


FIGURE 3.24 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI gauss, 2 espèces, graphon (3.28))

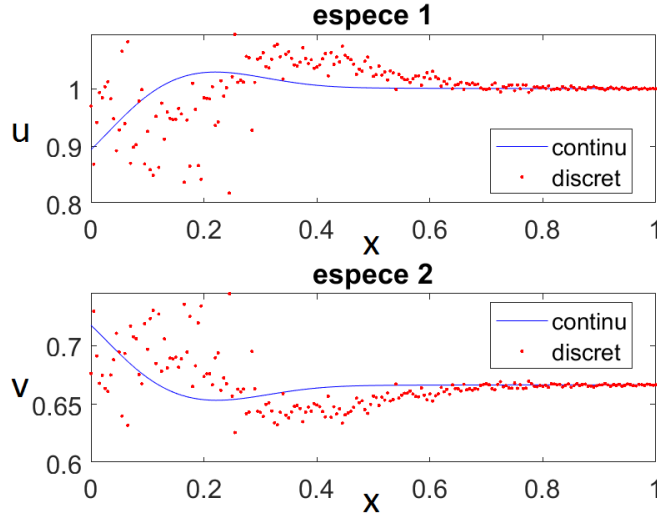


FIGURE 3.25 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.28))

Nous avons exécuté les mêmes codes et généré les mêmes graphes avec une perturbation gaussienne. Nous avons les solutions pour une exécution à la figure 3.23, la norme maximale de la différence entre les deux solutions en fonction de n à la figure 3.24 et les solutions moyennées pour 20 exécutions à la figure 3.25. Nous observons des images similaires au cas de la condition initiale sinusoïdale. Nous pouvons ajouter que l'intégration de l'EDP (3.2) conserve la continuité de solutions et semble également conserver la régularité de la condition initiale. En effet, une perturbation tant sinusoïdale que gaussienne est lisse et la solution garde cette régularité.

Toujours avec le même graphon mais cette fois avec une perturbation constante, nous obtenons les figures 3.26 pour les solutions d'une unique exécution, 3.27 pour la norme maximale et 3.28 pour la solution moyennée. Cette fois, la perturbation continue semble ne pas avoir d'impact sur l'équilibre, la solution via graphon nous donne une constante. La figure 3.26 nous indique que nous avons un comportement similaire pour la solution via graphe, avec une déviation néanmoins pour les premiers nœuds. Les derniers nœuds sont pour rappel très peu connectés, de par la construction du graphe, et nous pouvons alors intuitivement comprendre que le degré important des premiers nœuds génère une grande diffusion et incite à un déséquilibre des deux espèces. Ce comportement étrange de la courbe bleue est peut-être expliquée par le transport des spécificités de la condition initiale sur la solution rencontrée. En effet, avec les deux premières conditions initiales, nous voyions une courbe régulière pouvant s'apparenter à une gaussienne ou un sinus. La solution issue de la troisième condition initiale serait intuitivement, comme la perturbation, une fonction constante par morceaux. La courbe qui nous semble convenir au mieux aux points rouges, en se rappelant le théorème 3.2.2, est la fonction constante sur l'intervalle $[0, 1]$ complet. Dans la figure 3.27, nous voyons à nouveau une convergence de la norme et la figure 3.28 indique que les solutions sur réseau se rapprochent, avec la moyennisation, de la même constante sur tous les nœuds.

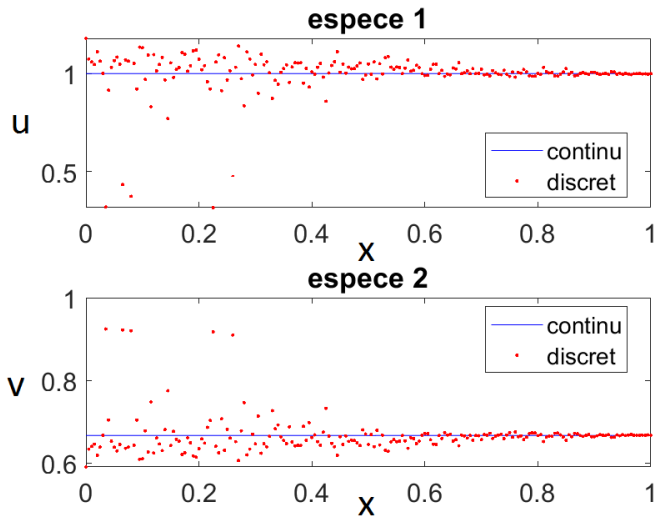


FIGURE 3.26 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.28))

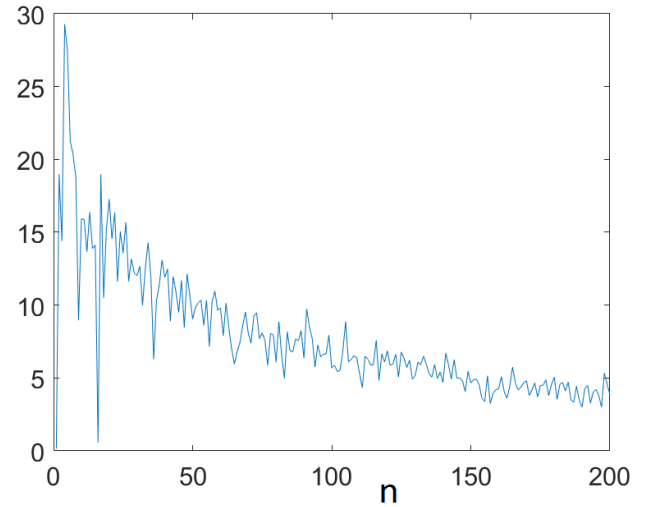


FIGURE 3.27 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI const, 2 espèces, graphon (3.28))

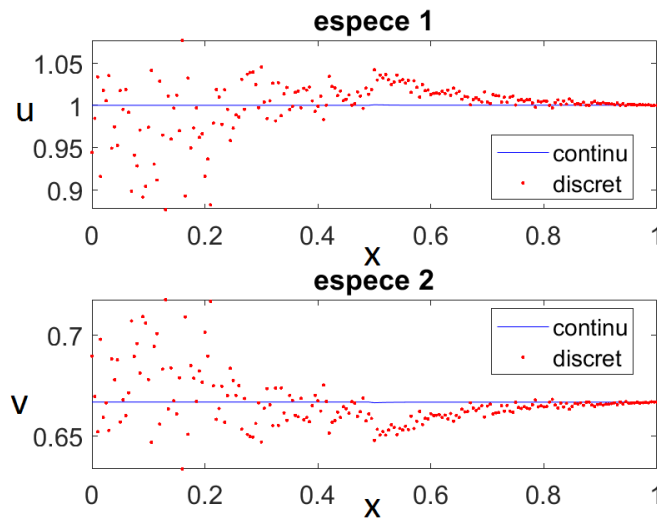


FIGURE 3.28 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.28))

Enfin, avec une perturbation aléatoire sur chaque nœud dont nous avons interpolé une fonction passant par ces points pour la condition continue, nous avons en premier lieu la figure 3.29 nous montrant les solutions après intégration. Nous remarquons que la solution continue est une courbe continue mais pas dérivable, confirmant notre intuition présentée juste avant que la régularité et la forme de la condition initiale sont transportées sur la solution. Nous n'avons pas eu l'occasion de creuser ces impressions de façon théorique, nous avons cependant remarqué, et cela se confirmera avec les autres exemples, que la régularité de la solution différerait en fonction de la condition initiale considérée. La figure 3.30 quant à elle nous présente sous forme d'image ce que le théorème 3.2.2 nous indiquait

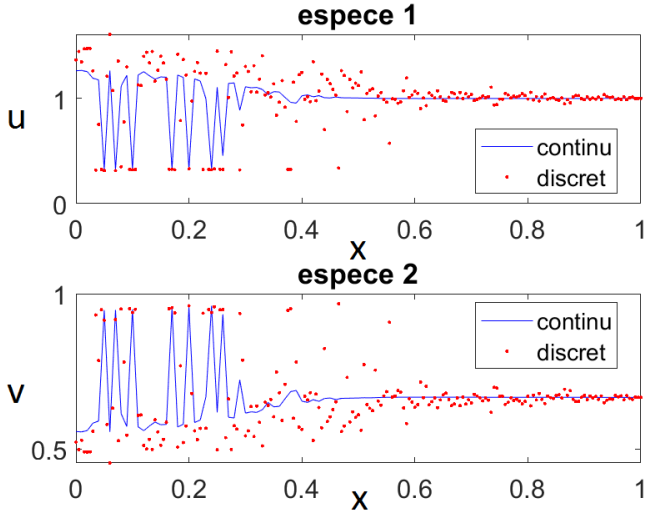


FIGURE 3.29 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI interp, $n = 200$, graphon (3.28))

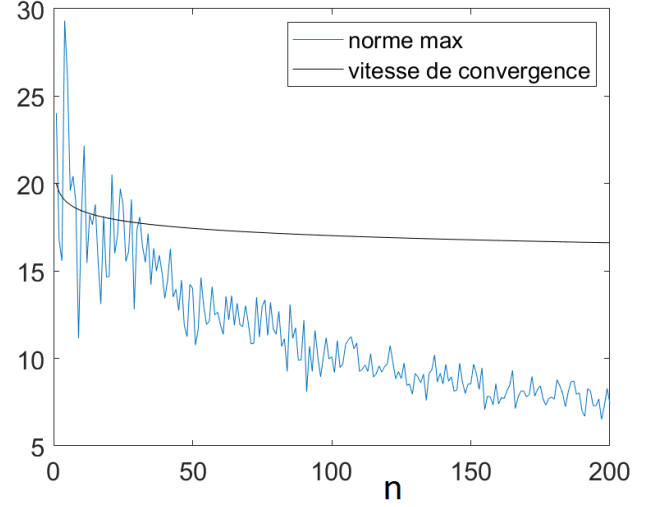


FIGURE 3.30 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI interp, 2 espèces, graphon (3.28))

en mathématique, c'est-à-dire, qu'au plus le nombre de nœuds est élevé, au plus proche les deux solutions sont, et ce même en prenant la norme maximale de la différence sur le temps. Rappelons nous que la vitesse de convergence dépendait de la dimension fractale de la frontière du support du graphon, nous avons trouvé une approximation de celle-ci de $2b = 1.94$ dans la section 3.3. Dans cette même image 3.30, nous avons affiché la courbe n^{b-1} , exposant présent dans l'inégalité (3.7) du théorème 3.2.2, afin de montrer que la courbe semble converger au moins aussi vite que de vitesse $b - 1$. Cela renforce donc le résultat démontré dans ce chapitre.

Graphon 2 - Erdős-Rényi

Passons maintenant à un second graphon afin de présenter un deuxième exemple qui nous permettra de souligner des éléments supplémentaires. Comme annoncé dans la section 3.4.1, nous avons pris la suite de graphes Erdős-Rényi de probabilité de connexion de $\frac{1}{2}$ pour tout nœud. Nous avons aussi montré que le graphon se résumait à la fonction constante

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

Lorsque nous vérifions si ce graphon est bien l'objet limite de la suite de graphes Erdős-Rényi, nous générons la figure 3.31 qui nous indique la norme de la différence entre les deux objets en fonction de n . Comme cette courbe converge vers 0, nous avons donc bien que $W = \frac{1}{2}$ est le graphon de cette suite.

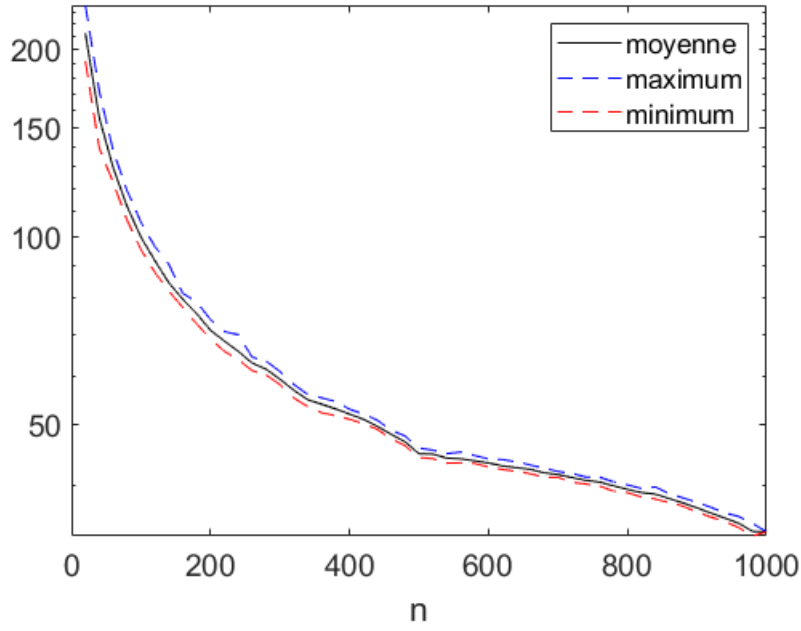


FIGURE 3.31 – Norme de $W - W_{G_n}$ avec G_n Erdős-Rényi

En considérant une perturbation en sinus, nous avons obtenu les figures suivantes. La première, affichée à la figure 3.32, nous montre les solutions avec une unique exécution. Nous remarquons que les points rouges, bien que donnant grossièrement la forme de la courbe bleue, sont un peu trop éparpillés. En prenant cette fois une solution moyennée, nous avons la figure 3.33 où nous voyons que la solution via graphe est cette fois beaucoup plus proche de la solution continue. Nous pouvons intuitivement expliquer cette relative efficacité par le fait que l'algorithme de construction d'un graphe Erdős-Rényi amène des réseaux relativement différents pour chaque exécution mais également par le fait que le graphon n'a que des valeurs de $\frac{1}{2}$ tandis que la matrice d'adjacence n'est constituée que de 0 et 1, ce qui mène à une différence assez importante entre le graphon et un graphe de n nœuds. Ensuite, nous voyons que la solution continue présente une forme assez proche d'une fonction trigonométrique. L'espèce 1 s'échappe des nœuds correspondant à l'intervalle $[0.1, 0.4]$ pour aller peupler le reste de l'intervalle, tandis que l'espèce 2 réalise l'inverse. Cela est logique puisque si une espèce délaisse un nœud, l'autre espèce comblera ce manque. La figure 3.34 donne quand à elle la vitesse de convergence de la solution via graphe vers la solution continue, n augmentant. Cette convergence semble pour le moins assez lente, idée confirmée par la formule (3.7), vu que celui-ci donne un exposant égal à $b - 1$, où b vaut de ce cas 1 (la dimension fractale de la frontière du support du graphon vaut trivialement $2b = 1$). La troisième figure représentée est la figure 3.35 affichant la norme de la différence entre les solutions à travers le temps. Nous constatons, comme pour le premier graphon, que cette norme est plus petite avec un plus grand nombre de nœuds et qu'elle augmente avec le temps. La solution ne convergeant pas vers l'équilibre homogène, l'erreur d'approximation de la condition initiale des EDO (3.1) s'amplifie avec le temps.

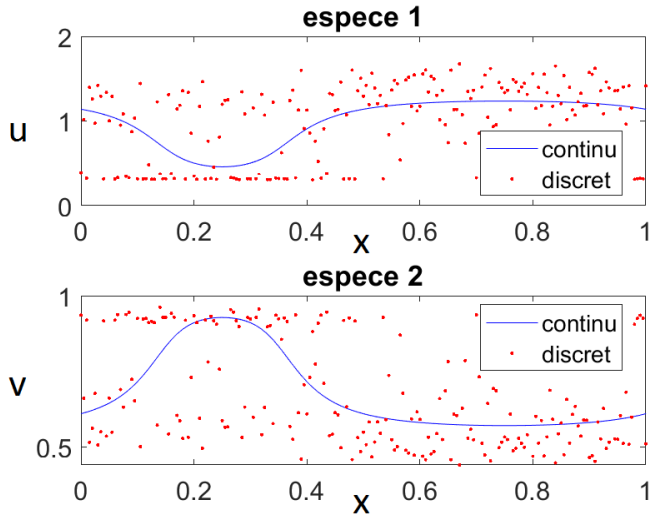


FIGURE 3.32 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.29))

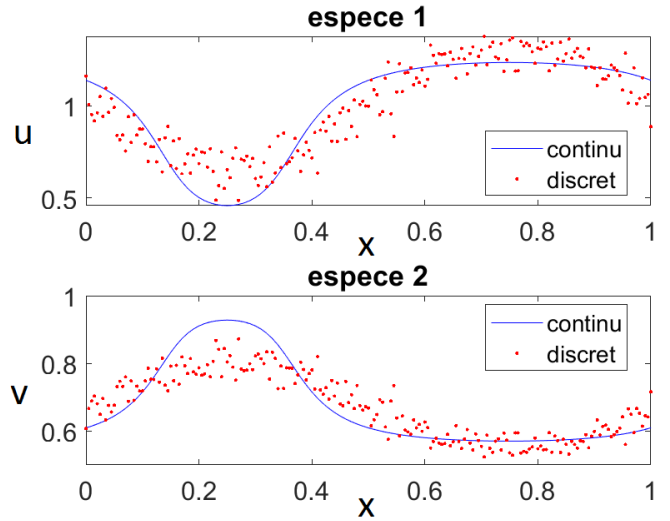


FIGURE 3.33 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.29))

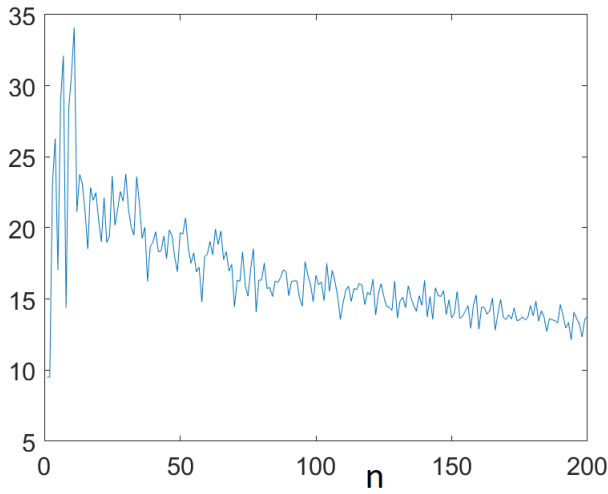


FIGURE 3.34 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI sinus, 2 espèces, graphon (3.29))

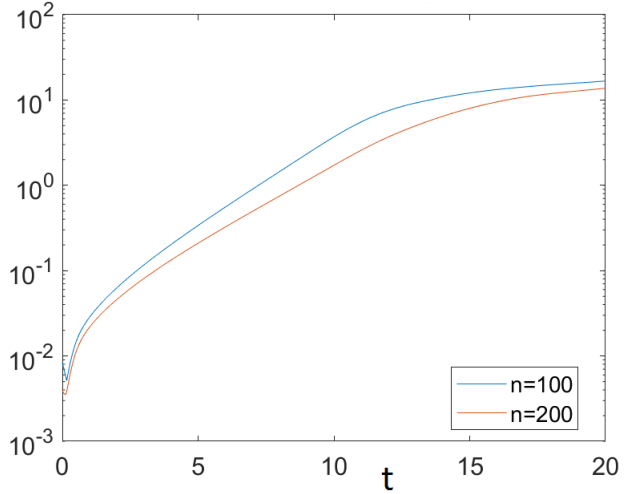


FIGURE 3.35 – Norme de la différence à travers le temps (CI sinus, $n = 200$, 2 espèces, graphon (3.29))

Passons maintenant à la perturbation gaussienne. Les solutions trouvées sont représentées à la figure 3.36, nous remarquons un comportement gaussien de la courbe continue, liée à la représentation par graphon. La solution liée au système d'équations différentielles (3.1) n'est quant à elle pas ressemblante à une courbe exponentielle. Nous voyons de nombreux points distants, éloignés de la solution continue mais également les uns des autres. En prenant une solution moyennée, nous obtenons la figure 3.37 qui procure cette fois une solution beaucoup plus cohérente, avec les solutions sur les nœuds qui construisent une forme plus cohérente et très similaire à la solution continue.

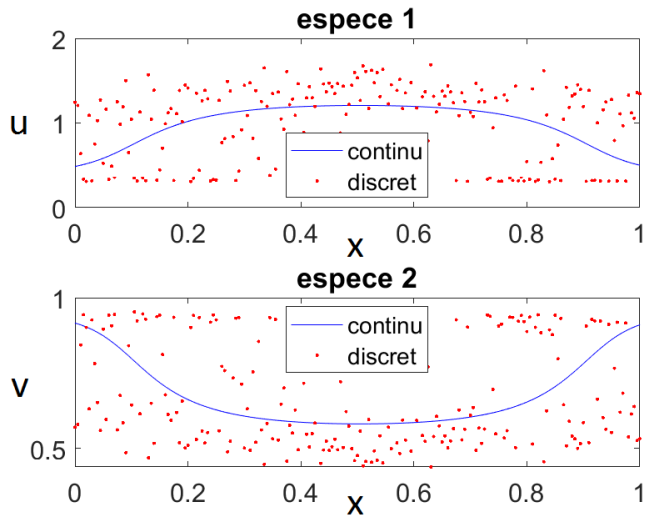


FIGURE 3.36 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.29))

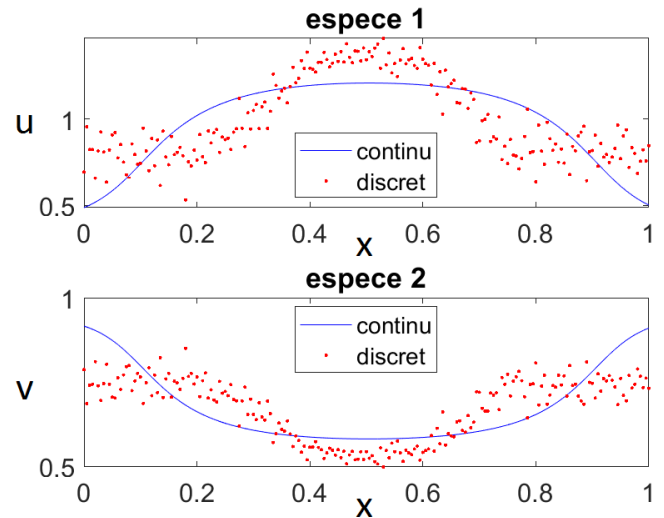


FIGURE 3.37 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.29))

Voyons maintenant comment la troisième condition initiale et le graphon constant lié à Erdős-Rényi interagissent (voir figure 3.38). Cette fois, la solution via graphon nous donne une fonction constante par morceaux, de la même forme que la condition initiale mais l'écart entre les deux plateaux s'est amplifié. Les valeurs de ces deux espèces sur le graphe semblent majoritairement arriver à ces deux paliers, nous pouvons donc dire que globalement les solutions ont convergé. Cette correspondance entre les deux solutions est plus flagrante dans la figure 3.39 où nous voyons que les outliers de la figure 3.38 ont été effacés lors de la moyennisation des solutions. En se plaçant dans un cas concret, par exemple les pigments de couleur sur la peau d'un animal, les solutions montrent que les deux couleurs se répartissent nettement en deux zones, l'une où la première couleur est en majorité et l'autre où c'est la seconde couleur. Cela nous rappelle un animal tel que le zèbre qui a une répartition très spatiale de ses rayures et qui présente uniquement deux couleurs, sans nuance. Nous pouvons également mentionner que la forme du graphon et des graphes considérés ont tendance à ne pas favoriser un nœud par rapport à un autre. Tous les sommets ont peu près le même degré et, si les deux plateaux sont dans ce sens-là, c'est uniquement lié au sens de la perturbation.

Finalement, en considérant la quatrième condition initiale, nous avons obtenu les solutions montrées à la figure 3.40. Comme prévu, la solution continue est de la même forme que la condition initiale, une courbe très irrégulière. Nous remarquons que la solution est majoritairement autour de 1.2 pour la première espèce et vers 0.55 pour la seconde, avec des pics d'amplitude assez comparables. Les solutions sur graphe exhibent ainsi le même comportement général, bien qu'il soit ici plus difficile d'appréhender la différence entre les solutions aux vus de la nature irrégulière de la fonction. La figure 3.41 quant à elle présente, comme les figures précédentes de la norme maximale pour chaque n considéré, une convergence de cette norme vers 0, convergence assez lente ici.

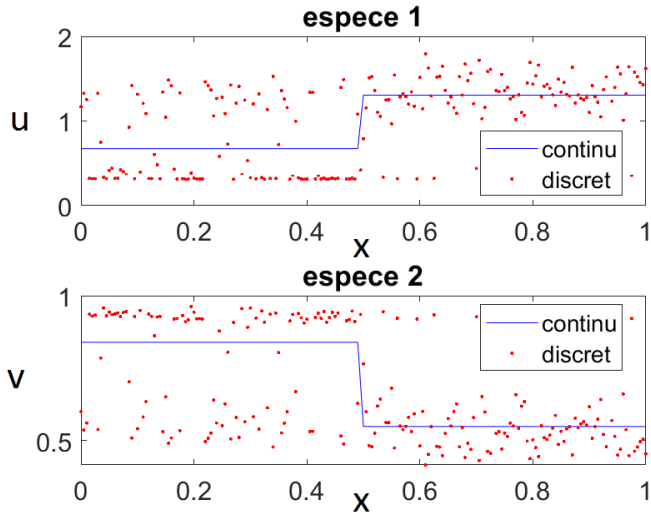


FIGURE 3.38 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.29))

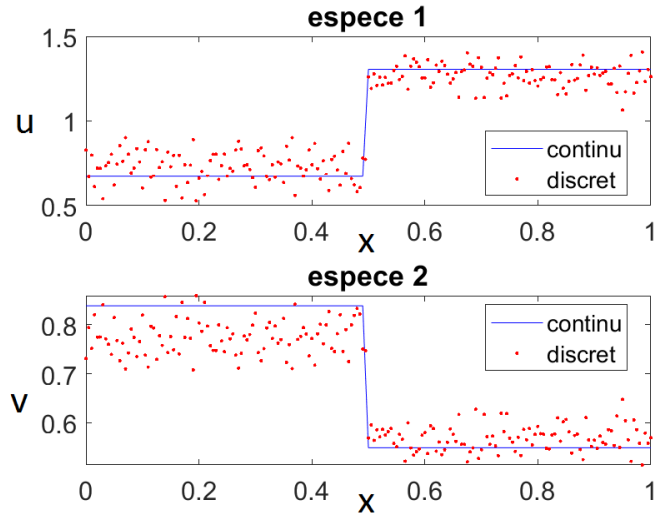


FIGURE 3.39 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.29))

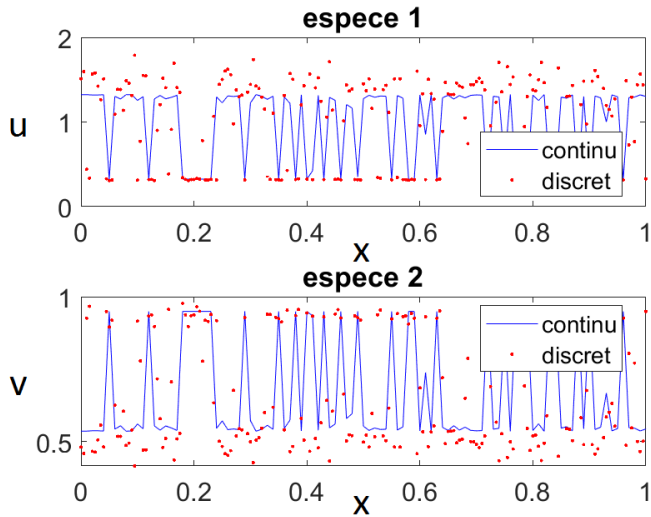


FIGURE 3.40 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI interp, $n = 200$, graphon (3.29))

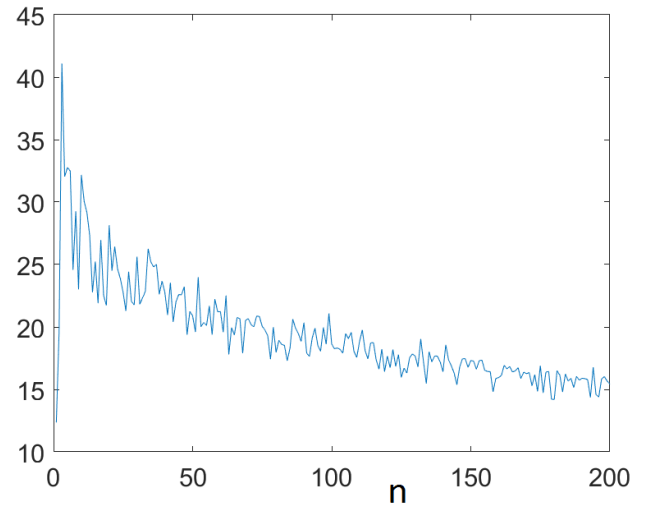


FIGURE 3.41 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI interp, 2 espèces, graphon (3.29))

Graphon 3

Le troisième exemple utilise la suite de graphes construite par l'algorithme de la table 3.1 et, comme présenté à cet endroit, le graphon correspondant consistait en la fonction

$$W(x, y) = 1 - xy \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

La figure 3.42 l'illustre en montrant que la suite de graphes converge vers le graphon.

Commençons comme pour les graphons précédents à montrer les solutions obtenues à partir de la condition initiale construite comme l'équilibre perturbée avec un sinus. La figure 3.43 nous indique que, tandis que les premiers nœuds et par conséquent un sous-intervalle de $[0, 1]$ finissent à une valeur constante pour les deux espèces avec une prévalence pour la seconde espèce, le reste des nœuds sont surtout habités par la première espèce mais diffèrent dans les valeurs finales. Nous avons ainsi une droite horizontale pour le premier sous-intervalle et une fonction linéaire pour le second. Cette fois, la solution liée à une exécution de l'algorithme 3.1, semble déjà être très intéressante et très bien coller à la courbe continue bleue. Cependant, les points rouges semblent donner un comportement discontinu. En moyennant, nous obtenons la figure 3.44 où nous voyons une convergence plus marquée sur les deux sous-intervalles mais surtout une transition mieux capturée entre ces deux sous-intervalles. Les deux figures montrant la norme de la différence entre les solutions maximale pour chaque n et à travers le temps sont les images 3.45 et 3.46 respectivement. Nous en concluons les mêmes particularités qu'avant. En d'autres termes, nous constatons la convergence de la norme maximale avec n augmentant et la norme globalement inférieure sur toute l'intégration de temps pour un n supérieur.

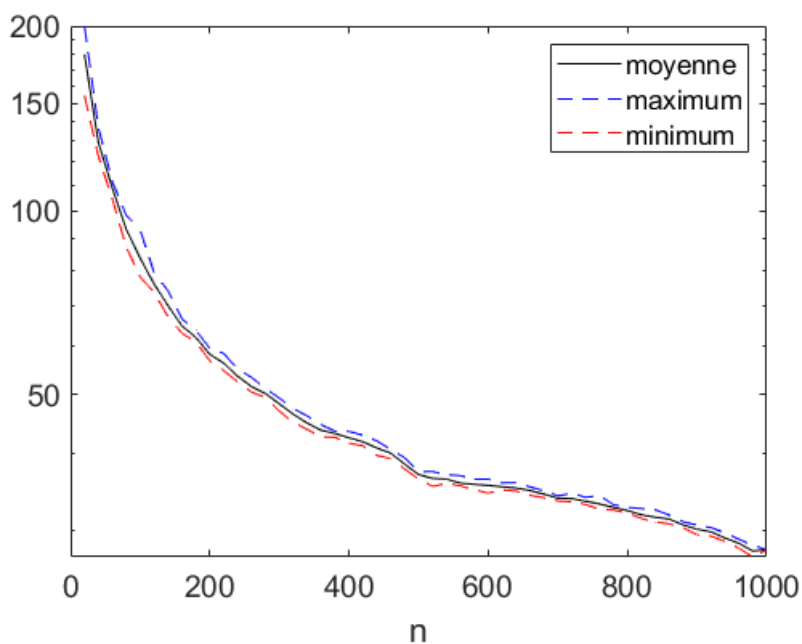


FIGURE 3.42 – Norme de $W - W_{G_n}$ avec G_n issu de l'algorithme 3.1

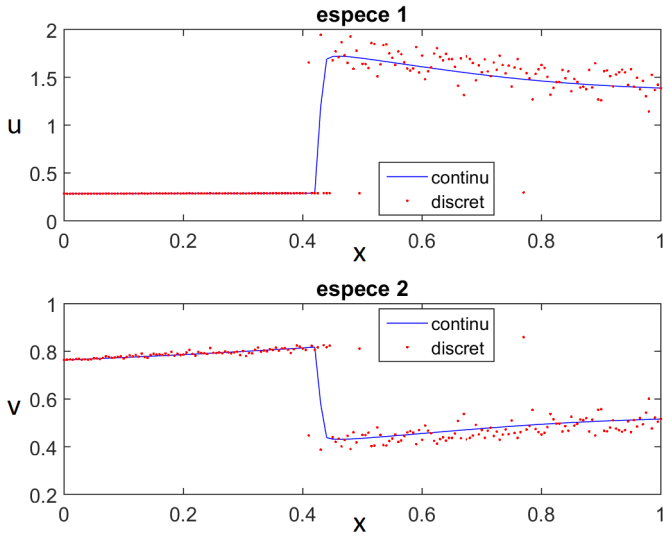


FIGURE 3.43 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.30))

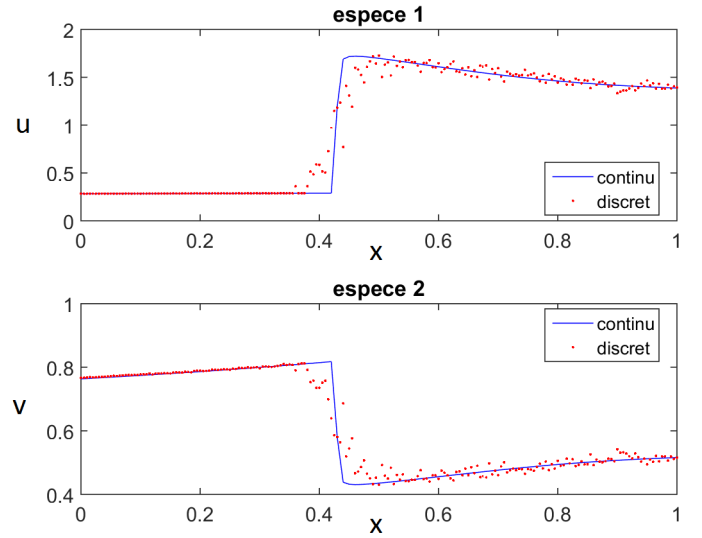


FIGURE 3.44 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.30))

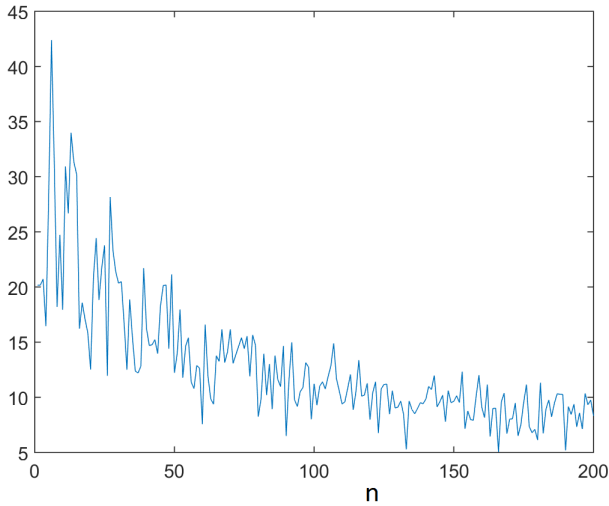


FIGURE 3.45 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI sinus, 2 espèces, graphon (3.30))

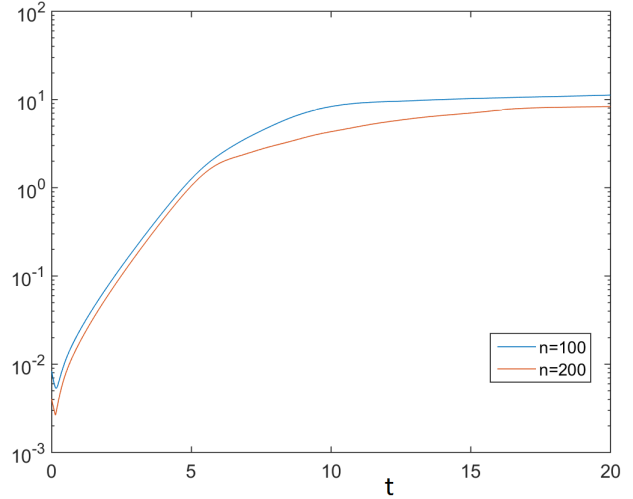


FIGURE 3.46 – Norme de la différence à travers le temps (CI sinus, $n = 200$, 2 espèces, graphon (3.30))

Avec une condition initiale gaussienne, nous obtenons les solutions affichées à la figure 3.47 et les solutions moyennées à la figure 3.48. Ces solutions nous ont semblé intéressantes du point de vue conclusion. En effet, nous voyons que la solution a tendance à ressembler sur les extrémités de l'intervalle à une droite constante, ce qui correspond à peu près à un cas stable. A cause de la perturbation qui modifie surtout le centre de l'intervalle c'est-à-dire les nœuds labellisés comme ceux du milieu, les deux espèces vont alors avoir tendance à renforcer cette déviation. Les espèces vont donc quitter les extrêmes pour rejoindre le centre ou inversement. Dans la région $[0.3, 0.4]$, les deux espèces se comportent de façon la plus extrême et cela s'explique par la grande connectivité des premiers nœuds comparativement aux derniers. Tandis que la figure 3.47 montre une capture générale du

comportement de la courbe continue par les points rouges avec certains d'entre eux qui apparaissent comme des outliers, la figure 3.48 montre une courbe plus précise générée par ces points rouges et une bien meilleure correspondance entre les deux solutions.

La troisième condition initiale amène à des résultats similaires à la perturbation sinusoïdale. En effet, nous retrouvons les deux plateaux dans les solutions (voir figures 3.49 et 3.50). Nous voyons donc que perturber de façon constante sur les deux sous-intervalles ou de façon régulière n'altère pas les solutions. Les deux espèces vont avoir tendance à s'équilibrer en deux clusters qui eux diffèrent nettement dans les densités des espèces.

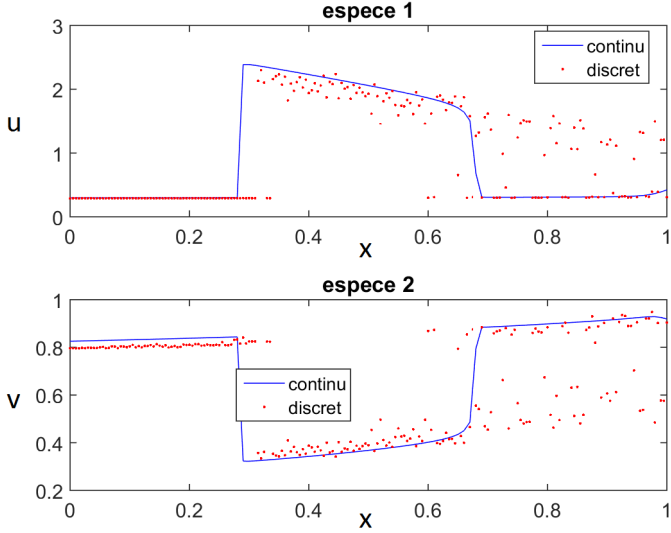


FIGURE 3.47 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.30))

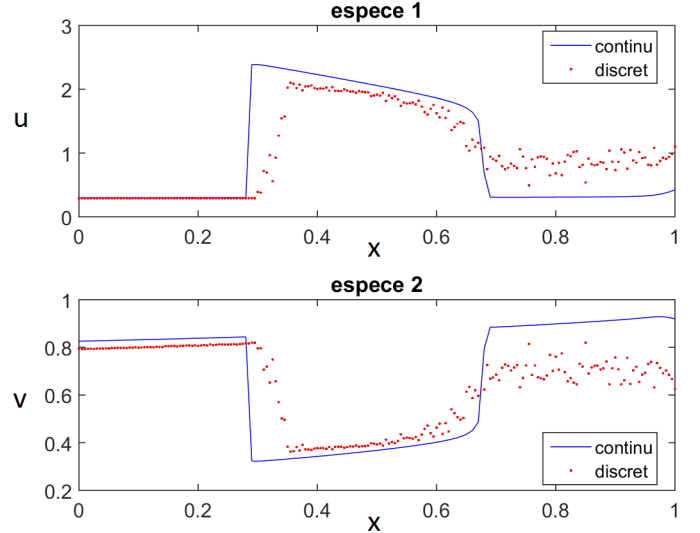


FIGURE 3.48 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.30))

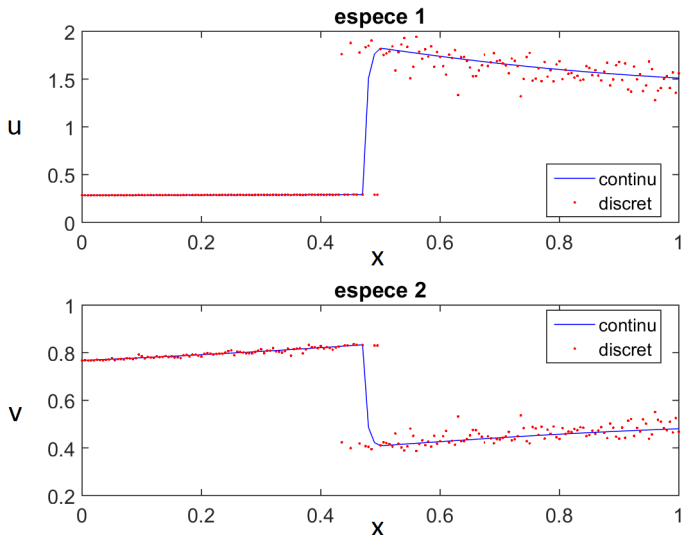


FIGURE 3.49 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.30))

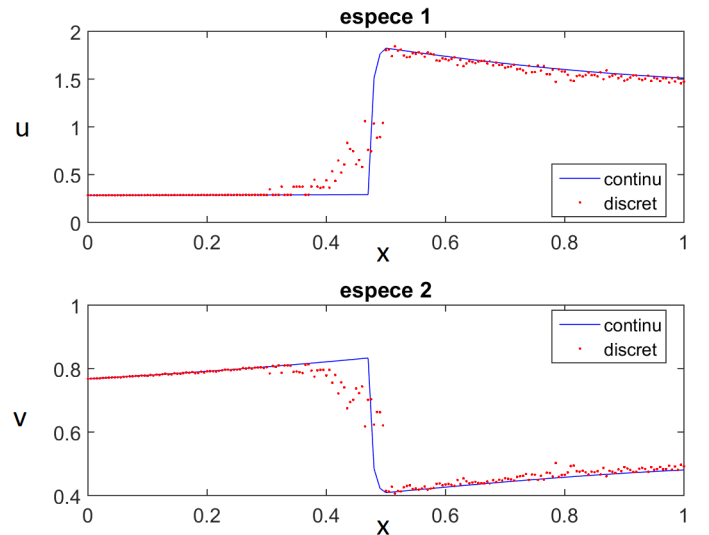


FIGURE 3.50 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.30))

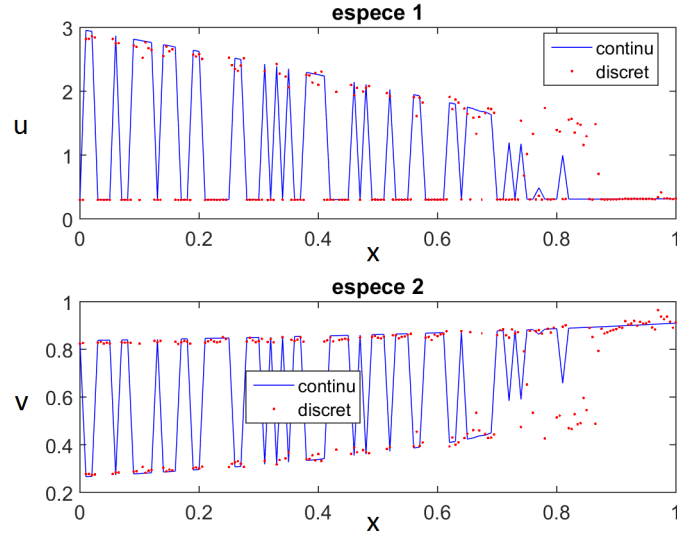


FIGURE 3.51 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$
(CI interp, $n = 200$, graphon (3.30))

Enfin, avec une perturbation interpolée, nous obtenons une solution présentant les mêmes caractéristiques que la condition initiale, visible dans la figure 3.51. Nous remarquons également que les plus grands pics se situent dans les premiers nœuds, à nouveau ceci est expliqué par une diffusion plus importante sur les premiers nœuds due à leurs degrés plus élevés.

Graphon 4 - réseau construit par Watts-Strogatz

Comme dernier graphon que nous avons considéré, nous avons choisi un réseau construit via l'algorithme de Watts-Strogatz (WS) [Wat]. Dans un premier temps, nous avons considéré l'algorithme avec une probabilité de reconnection nulle, nous avons donc un anneau régulier. Nous avons choisi que les nœuds sont connectés si leur distance est inférieure à un huitième du nombre de nœuds. Chaque nœud sera donc connecté au quart des nœuds les plus proches, un huitième vers la gauche et un huitième vers la droite. Mathématiquement, la matrice d'adjacence est construite comme

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| \leq \frac{n}{8} \text{ et } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Visuellement, nous pouvons imaginer cela comme démarrer d'un anneau simple où les nœuds sont connectés au deux plus proches (figure 3.52), puis ajouter des liens directs entre les nœuds qui sont à distance inférieure ou égale à $\frac{n}{8}$. La figure 3.53 montre un exemple avec n égal à 20. Par conséquent, dans ce réseau, tout nœud à distance deux voit un lien direct les lier. Enfin, si la probabilité de reconnexion est non nulle, certains liens de la figure 3.53 sont supprimés avec probabilité p et des liens pour des nœuds plus lointains sont créés avec probabilité p (figure 3.54). Pour certains p dans l'algorithme de Watts-Strogatz, nous parvenons à obtenir un réseau Small World, c'est-à-dire que le chemin le plus court entre deux nœuds quelconques du réseau est très court comparativement à la taille du réseau et suit à peu près $\log(n)$. Un grand nombre de réseaux rencontrés dans notre quotidien possède la propriété d'être Small World. Pensons par exemple aux réseaux sociaux, où deux personnes sont liées via 6 intermédiaires au maximum [Deg] (sauf pour certains outliers) ou au réseau aérien où de façon générale 3 ou 4 avions suffisent pour aller d'un endroit à un autre [AMR05].

Le graphon qui correspond à $p = 0$ est trivialement

$$W(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - y| \leq \frac{1}{8}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Commençons par montrer que ce graphon est effectivement le graphe limite de la suite de graphes WS avec $p = 0$. La figure 3.55 montre la norme de la différence entre la suite de graphes et le graphon. Étant donné qu'il n'y a aucun effet probabiliste qui entre en jeu dans cet algorithme, du moins lorsque p est égal à zéro, c'est-à-dire dans le cas de l'anneau régulier, chaque réalisation donne exactement le même graphe et donc nous n'avons pas besoin de moyenner sur plusieurs exécutions. De plus, nous pouvons voir que, bien que la tendance générale est une convergence, décroissance de cette norme, la figure 3.55 nous montre une oscillation périodique qui est due à la manière dont a été construite la comparaison d'un graphe avec un graphon. Comme expliqué dans la section 1.2, nous avons redimensionné chaque graphe en un graphe de 1000 nœuds afin de toujours comparer les graphes et le graphon sur le même nombre de points. Cependant, lorsque n n'est pas un diviseur de 1000, nous devons dupliquer les entrées de la matrice d'adjacence A de façon un peu particulière (voir figure 1.17 pour rappel). Cette duplication amène à l'oscillation de la norme puisque celle-ci engendre des erreurs plus ou moins grandes en fonction du n à partir duquel nous réalisons la duplication.

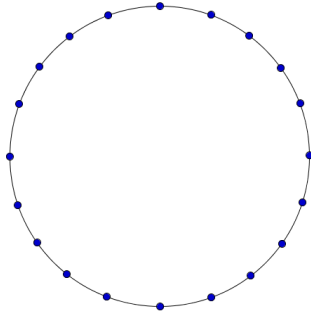


FIGURE 3.52 – Anneau simple (par WS)

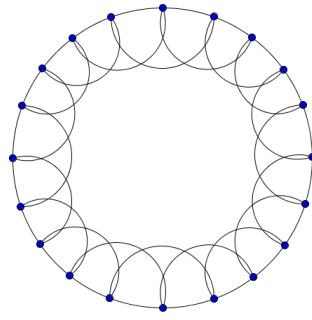


FIGURE 3.53 – Anneau composé (par WS)

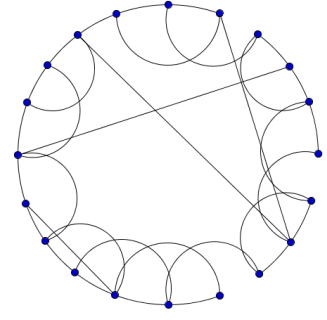


FIGURE 3.54 – Anneau perturbé (par WS)

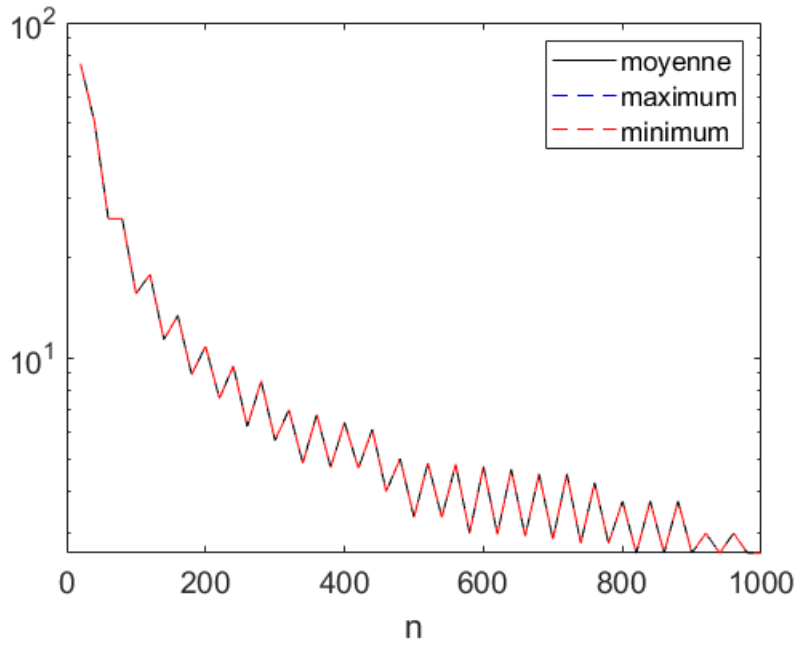


FIGURE 3.55 – Norme de $W - W_{G_n}$ (WS $p = 0$)

Avec la première condition initiale, nous avons les solutions de la figure 3.56 où nous remarquons que l'équilibre semble stable cette fois-ci. La norme maximale de l'erreur, montrée à la figure 3.57 est très petite et converge rapidement vers 0, ce qui montre bien que les solutions convergent rapidement vers la même valeur, l'équilibre homogène ici. Le pic visible dans la figure 3.57 serait dû au choix dans le redimensionnement de la matrice d'adjacence (figure 1.17 pour rappel), il n'est néanmoins pas important puisqu'il se situe dans la partie transitoire, c'est le comportement à l'infini qui nous intéresse. La norme à travers le temps renforce l'idée de convergence puisque la figure 3.58 indique des erreurs de l'ordre de 10^{-4} après très peu de temps. Cette fois, la norme diminue avec le temps et cela est dû à la stabilité de l'équilibre. En effet, étant donné que l'équilibre semble stable, cette erreur diminuera lorsque les solutions s'approchent de l'équilibre homogène. Comme le graphe est déterministe, il n'est pas nécessaire de moyenner les solutions.

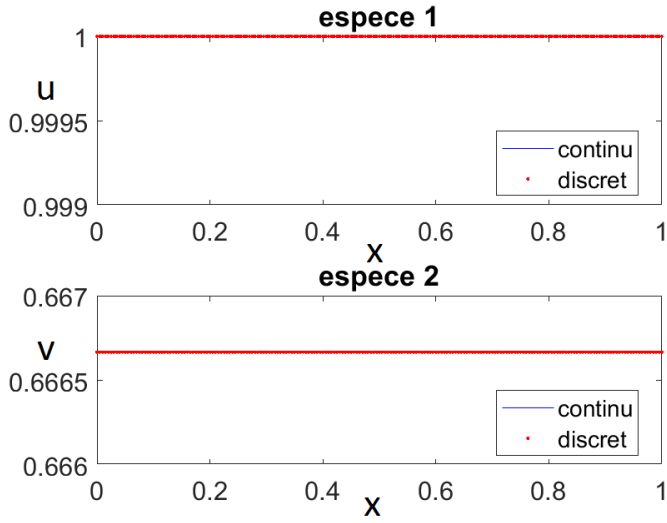


FIGURE 3.56 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0$)

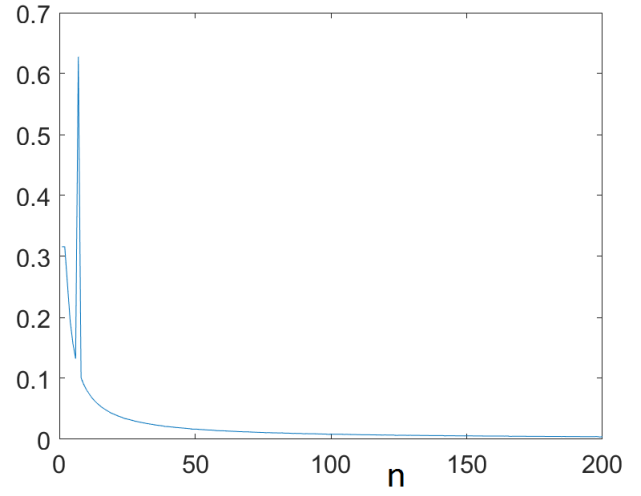


FIGURE 3.57 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI sinus, 2 espèces, graphon (3.31) $p = 0$)

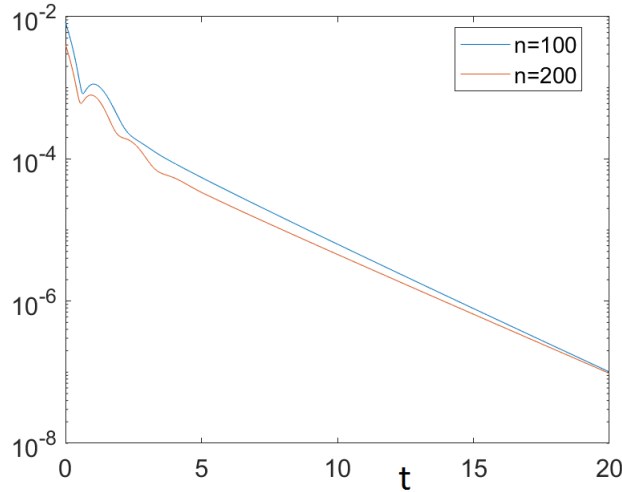


FIGURE 3.58 – Norme de la différence à travers le temps (CI sinus, $n = 200$, 2 espèces, graphon (3.31) $p = 0$)

En ce qui concerne la seconde condition initiale, nous obtenons la figure 3.59 nous donnant les solutions des deux systèmes. Nous voyons que l'échelle de ces solutions sont extrêmement petites, nous avons donc également une stabilité de l'équilibre. Bien que n'ayant pas la même fréquence ou même amplitude, les deux solutions sont de type sinusoïdales. La troisième condition initiale donne quant à elle les solutions de la figure 3.60 où nous concluons aux mêmes remarques que précédemment. Ces solutions pourraient sembler en contradiction avec l'idée que la condition initiale a un impact sur la régularité de la solution. Cependant, au vu de l'échelle (l'échelle des ordonnées est de l'ordre de 10^{-7} , ce qui correspond à la précision machine), nous pouvons affirmer que la solution est en fait constante et correspond à l'équilibre $(1, \frac{2}{3})$ du Brusselator.

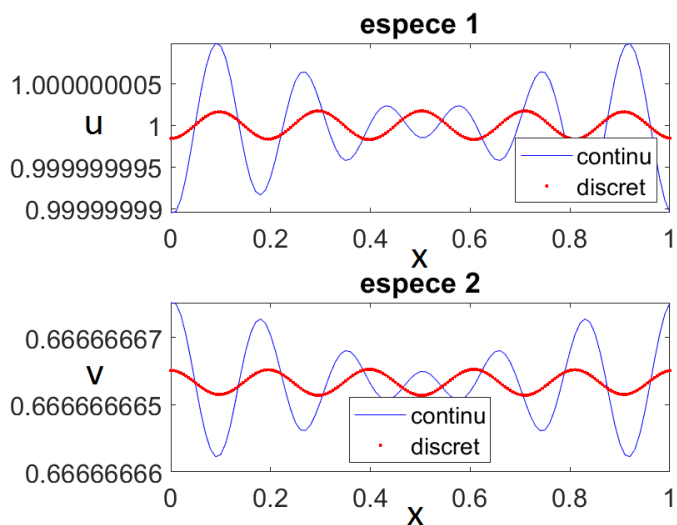


FIGURE 3.59 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0$)

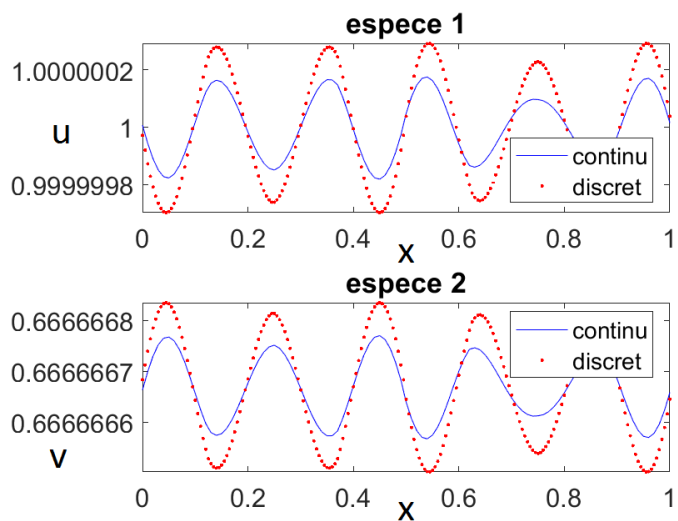


FIGURE 3.60 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0$)

Enfin, avec la condition initiale aléatoire interpolée, nous obtenons les solutions à la figure 3.61 et la norme maximale à la figure 3.62. Nous remarquons des solutions similaires aux précédentes, non constantes de par la précision machine et où la norme maximale converge très vite vers 0 avec un pic dans la partie transitoire certainement dû au choix de méthode de redimensionnement de la matrice d'adjacence (figure 1.17 pour rappel).

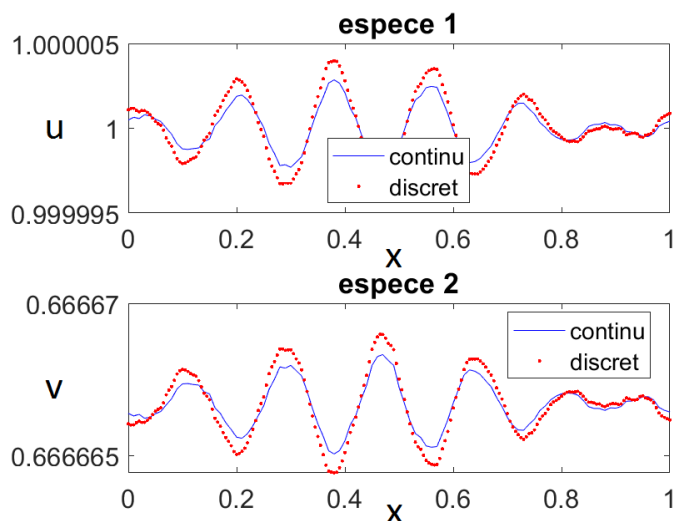


FIGURE 3.61 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI interp, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0$)

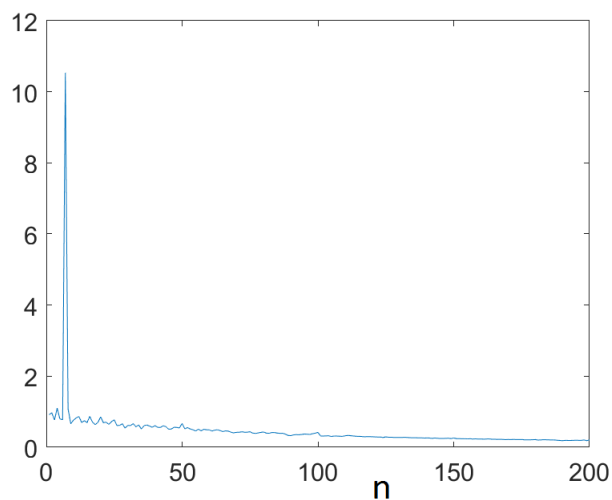


FIGURE 3.62 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI interp, 2 espèces, graphon (3.31) $p = 0$)

Intéressons-nous également aux résultats lorsque la probabilité p vaut 0.6. Lorsque p est non nul, nous considérons alors que les liens de l'anneau régulier se forment avec une probabilité de $1 - p$ tandis que les autres liens, appelés raccourcis pour des raisons évidentes, existent avec une probabilité de p . Les premiers raccourcis donnent un caractère Small World au réseau puisque tous les nœuds deviennent proches les uns par rapport aux autres tout en gardant un coefficient de clustering élevé [Zai12]. Le coefficient de clustering est la fraction de triplets de sommets connectés par rapport à tous les couples de sommets connectés. Un coefficient de clustering élevé signifie donc que nous avons beaucoup de communautés dans le réseau. Au delà d'une certaine valeur pour p cependant nous considérons que nous n'avons plus un caractère Small World car le coefficient de clustering devient petit. La matrice d'adjacence devient

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| \leq \frac{n}{8} \text{ et } i \neq j \text{ avec une probabilité de } 1 - p, \\ 0 & \text{sinon, avec une probabilité de } p. \end{cases}$$

Le graphon quant à lui devient

$$W(x, y) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } |x - y| \leq \frac{1}{8}, \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

La courbe de la norme de la différence avec une probabilité de 0.6 est celle montrée à la figure 3.63. Cette fois, au vu de l'insertion d'un effet probabiliste dans la construction des graphes, les courbes du minimum, maximum et de la moyenne ne coïncident plus, nous voyons une décroissance stricte et une assez bonne convergence.

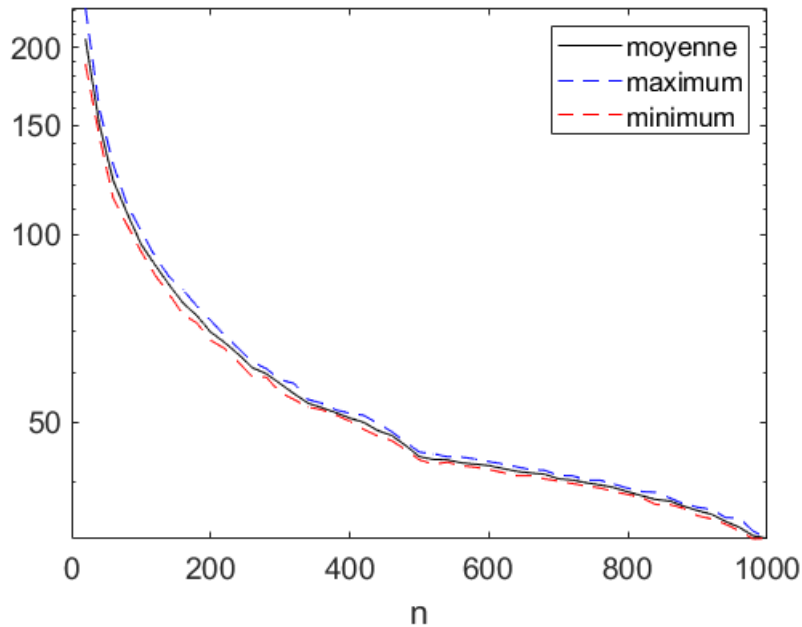


FIGURE 3.63 – Norme de $W - W_{G_n}$ (WS $p = 6$)

Avec la condition initiale en sinus, nous voyons que nous retrouvons une instabilité de Turing (figure 3.64) avec un intervalle bien déterminé où la seconde espèce a pris le pas sur la première. La figure 3.65 nous montre la norme maximale de la différence entre les deux solutions qui, comme dans tous les cas précédents, est convergente. La norme sur le temps est elle croissante avec l'accumulation d'erreur venant de la discrétisation de la condition initiale pour le système (3.1) et la courbe correspondant à $N = 200$ se trouve bien en dessous de celle où $N = 100$ (figure 3.66). Enfin, comme nous réintégrons un effet probabiliste dans la construction des graphes, une moyennisation des solutions reprend tout son sens et la figure 3.67 nous permet de conclure que la solution de l'EDP (3.2) est effectivement une très bonne solution pour remplacer la solution des EDO (3.1) et de voir que la solution est proche d'une sinusoïdale.

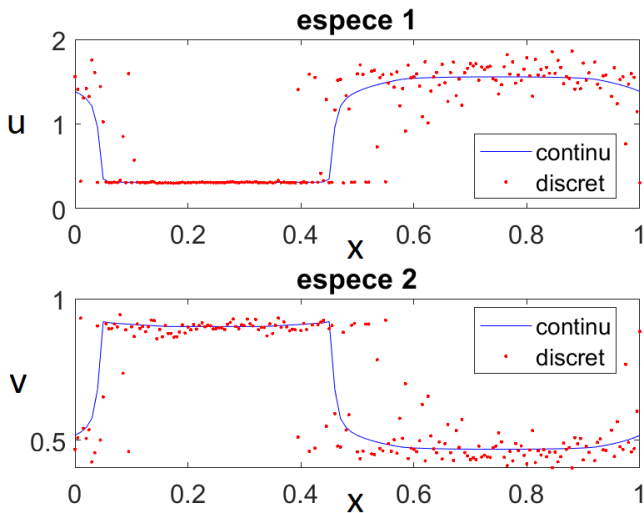


FIGURE 3.64 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0.6$)

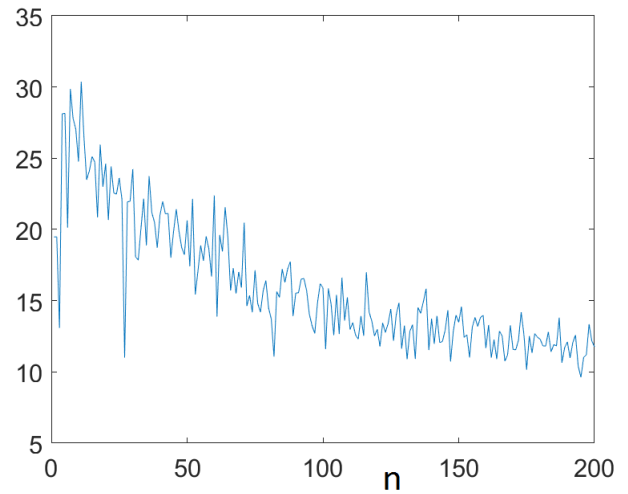


FIGURE 3.65 – Norme maximale de la différence sur l'intervalle $[0, 20]$ dépendant de n (CI sinus, 2 espèces, graphon (3.31) $p = 0.6$)

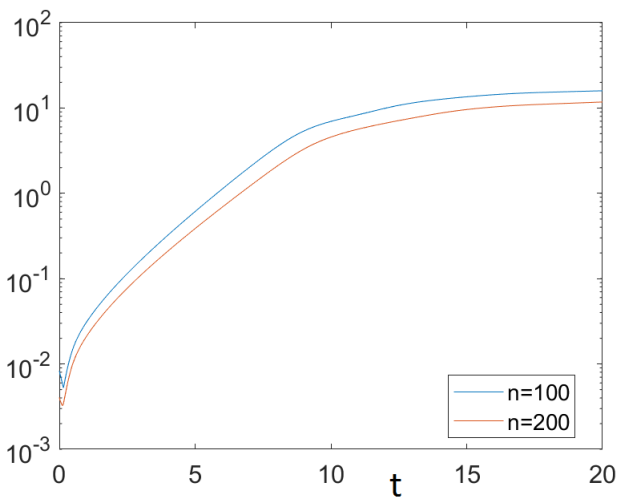


FIGURE 3.66 – Norme de la différence à travers le temps (CI sinus, $n = 200$, 2 espèces, graphon (3.28) $p = 0.6$)

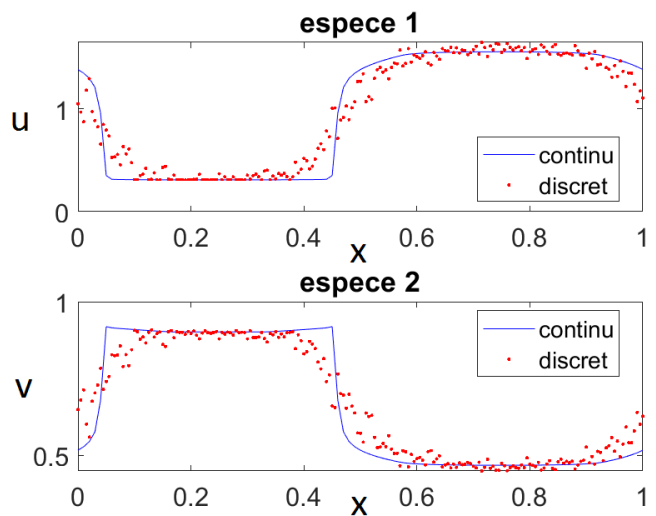


FIGURE 3.67 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI sinus, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0.6$)

La condition initiale gaussienne nous procure les solutions affichées à la figure 3.68 où nous voyons une courbe assez similaire à une gaussienne et de nouveau une instabilité de Turing. Il semblerait donc que $p = 0$ gardait la dynamique stable même avec la diffusion tandis que $p = 0.6$ la rend instable. Les solutions moyennées sont quant à elles montrées à la figure 3.69 où les points rouges sont plus organisés qu'à la figure 3.68 et forment grossièrement une courbe gaussienne également.

Finalement, avec la troisième condition initiale (constante par morceaux), nous obtenons les mêmes solutions qu'avec la sinusoïdale, avec un plateau à la figure 3.70 et une moyennisation des solutions qui épouse mieux la courbe continue à la figure 3.71.

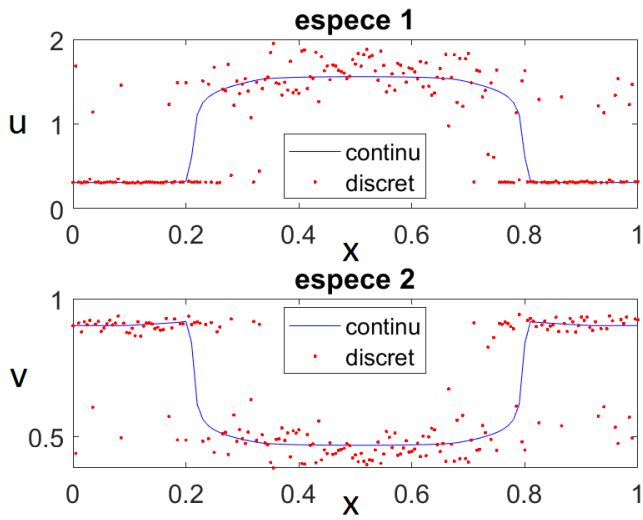


FIGURE 3.68 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0.6$)

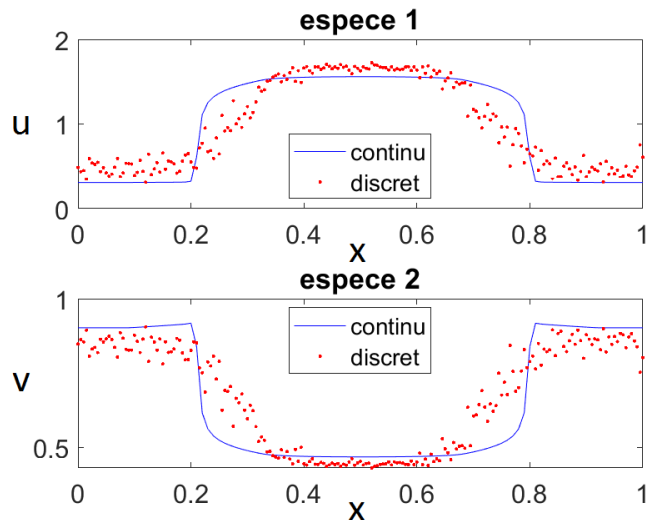


FIGURE 3.69 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI gauss, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0.6$)

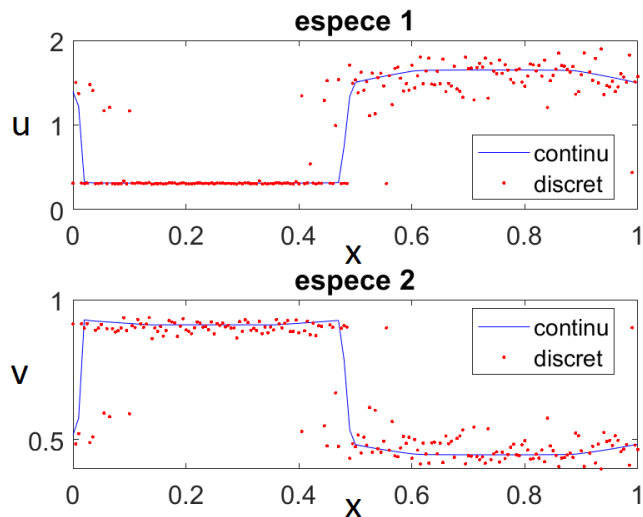


FIGURE 3.70 – Solutions des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0.6$)

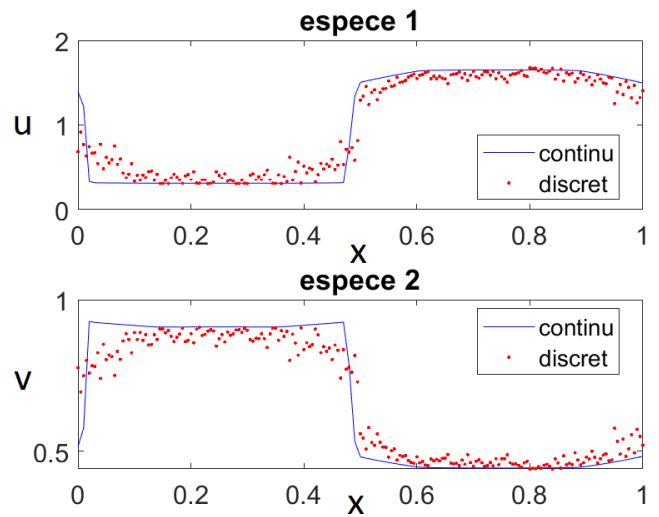


FIGURE 3.71 – Solutions moyennées des espèces u et v en $t = 20$ (CI const, $n = 200$, graphon (3.31) $p = 0.6$)

3.5 Structure propre de l'opérateur graphon

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur les fonctions propres et valeurs propres d'un graphon. Ces informations sont extrêmement intéressantes car elles permettent de déterminer la stabilité de la dynamique définie par le graphon (3.2) mais également de caractériser les fonctions propres instables qui pourraient exister. Elles permettraient de prédire les motifs de Turing du système. Comme nous avons un opérateur intégral donc compact et auto-adjoint, le spectre se résume en les valeurs propres qui sont en quantité au plus dénombrable. Nous pouvons ainsi les indiquer par un entier. Mais comment obtenir les $\{\lambda_i\}$ et $\{\phi_i\}$ dans

$$\mathcal{W}(\phi_i)(x) = \int_0^1 W(x, y)\phi_i(y)dy = \lambda_i\phi_i(x)? \quad (3.33)$$

Une méthode habituelle que nous avons pu remarquer par exemple dans [AMPSS17] est de résoudre les équations différentielles

$$\frac{d^k}{dx^k} \int_0^1 W(x, y)\phi_i(y)dy = \lambda_i \frac{d^k \phi_i(x)}{dx^k}.$$

Prenons un exemple concret et montrons comment ces valeurs et fonctions propres peuvent être trouvées. Prenons le graphon W défini par

$$W(x, y) = 1 - \max(x, y).$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}\phi_i)(x) &= \int_0^1 [1 - \max(x, y)]\phi_i(y)dy \\ &= \int_0^x (1 - x)\phi_i(y)dy + \int_x^1 (1 - y)\phi_i(y)dy \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} (1 - x) \int_0^x \phi_i(y)dy + \int_x^1 (1 - y)\phi_i(y)dy &= \lambda_i \phi_i(x). \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i \phi_i(1) = 0 & \Rightarrow \phi_i(1) = 0. \\ \lambda_i \phi_i'(x) = - \int_0^x \phi_i(y)dy & \Rightarrow \phi_i'(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons $\lambda_i \phi_i''(x) = -\phi_i(x)$. Par conséquent, l'EDO à résoudre est $\lambda_i \phi_i'' + \phi_i = 0$. La fonction ϕ_i sera alors de la forme

$$\phi_i(x) = A \sin \frac{x}{\sqrt{\lambda_i}} + B \cos \frac{x}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Avec la première CI, nous avons $\phi_i(1) = 0 = A \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} + B \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$, tandis qu'avec la seconde CI, nous avons, sachant que $\phi_i'(x) = \frac{A}{\sqrt{\lambda_i}} \cos \frac{x}{\sqrt{\lambda_i}} - \frac{B}{\sqrt{\lambda_i}} \sin \frac{x}{\sqrt{\lambda_i}}$, $\phi_i'(0) = 0 = \frac{A}{\sqrt{\lambda_i}}$.

D'où, $A = 0$. Revenant à la première CI, nous avons $\phi_i(1) = 0 = B \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$. Nous savons que B doit être différent de 0, sinon la fonction ϕ_i est trivialement nulle (elle ne serait alors pas une fonction propre). Nous avons

$$\sqrt{\lambda_i} = \left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)^{-1} \Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)^2}.$$

La fonction correspondante est alors

$$\phi_i(x) = B \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)x.$$

Le B est calculé de façon à ce que les fonctions propres soient normées, c'est-à-dire $\|\phi_i\|_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 B^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)x dx &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 \int_0^1 \frac{1 + \cos(\pi + 2i\pi)x}{2} dx &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(\pi + 2i\pi)x}{\pi + 2i\pi} \right]_0^1 &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 \left(\frac{1}{2} + 0 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow B^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow B &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nous choisissons sans perdre de généralité que $B = \sqrt{2}$. Finalement, nous obtenons comme structure propre

$$\lambda_i = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)^2} \text{ et } \phi_i(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)x.$$

Nous avons ainsi les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur \mathcal{W} qui est compact. Nous avons trouvé une base orthonormée de fonctions propres liées à des valeurs propres. Le problème est que nous voulons les comparer avec les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice laplacienne et non de la matrice d'adjacence puisque la dynamique sur graphe est décrite par L et le graphon vient représenter cette matrice en dimension infinie pour la dynamique sur graphon. Par conséquent, nous devons plutôt déterminer les valeurs propres et fonctions propres de $(\mathcal{W}_{\mathcal{L}}f)(x) = \int_0^1 W(x, y)(f(y) - f(x))dy$. D'où, nous devons résoudre :

$$\frac{d^k}{dx^k} \int_0^1 W(x, y)(\phi(y) - \phi(x))dy = \lambda \frac{d^k \phi(x)}{dx^k}.$$

Par un raisonnement similaire et avec le graphon $W(x, y) = 1 - \max(x, y)$, nous obtenons avec $k = 1$ c'est-à-dire en dérivant une fois, un des cas suivants

1. $\lambda = 0$ et $\phi'(0) = 0$,
2. $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\phi(1) = 0$,
3. $\phi(1) = 0$ et $\phi'(0) = 0$.

L'équation du second ordre à résoudre est

$$\Leftrightarrow \phi''(x) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \lambda \right) + 2x\phi'(x) = 0.$$

Cette équation se résout par substitution $\psi = \phi'$ et nous avons

$$\psi(x) = \phi'(x) = \frac{C}{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \lambda\right)^2}.$$

Nous faisons face à trois cas :

1. avec les CI 1, nous avons que $\phi'(0) = 0$ et la seule solution pour que $\phi'(0)$ soit nul est que $C = 0$, d'où $\phi(x) = \text{cste}$.

$\Rightarrow \lambda = 0$ et $\phi(x) = c$ une valeur propre et sa fonction propre.

2. avec les CI 2, nous avons que $\phi'(x) = \frac{4C}{x^4}$ ($\lambda = \frac{-1}{2}$), par conséquent $\phi(x) = \frac{-4C}{3x^3} + k$. Or cette fonction n'est pas L^2 et n'est pas définie en 0 et 1.
3. avec les CI 3, nous avons comme dans le premier cas que $\phi(x) = c$, sauf qu'avec la seconde CI, nous obtenons que $\phi(x) = 0$, ce qui est impossible (une fonction propre ne peut être trivialement nulle).

Nous en concluons donc que nous avons uniquement comme valeur propre et fonction propre :

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \phi(x) = c.$$

Le manque de valeurs propres s'explique par la non compacité de l'opérateur \mathcal{W}_L . En effet, cet opérateur peut se réécrire, en utilisant la définition (3.33), comme

$$\mathcal{W}_L f = \mathcal{W}f - f \int_0^1 W(., y) dy,$$

où le second terme peut être identifié à un opérateur de multiplication. Or, cet opérateur n'est pas compact [Par]. Par conséquent, la différence de ces deux opérateurs n'est pas non plus compacte. Ainsi, le spectre de l'opérateur n'est pas réduit à ses valeurs propres et nous ne pouvons pas nécessairement trouver une base orthonormée de fonctions propres pour diagonaliser l'opérateur, bien que cette diagonalisation soit toujours possible par des opérateurs unitaires. Nous montrerons dans la section suivante deux démarches possibles pour trouver l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur graphon, si cet ensemble existe, et pour établir la stabilité de l'opérateur que nous ayons cet ensemble ou pas.

3.6 Stabilité de l'équilibre homogène pour un système de réaction-diffusion

Si le graphon est invariant sous translation et de période 1, c'est-à-dire si le graphon est une fonction à une seule variable et de période 1, nous pouvons effectivement effectuer une étude de stabilité aboutie [KT18] [Med14b]. Nous pouvons déjà faire remarquer que, sous ces conditions, le degré est constant. Les valeurs propres de L sont les valeurs propres de A dont on enlève ce degré constant puisque $L = A - D$. Les vecteurs propres sont par contre communs entre la matrice d'adjacence et la matrice laplacienne. Il est donc aisé d'obtenir la structure propre de L . Même en passant en dimension infinie, nous gardons un lien entre la structure propre de \mathcal{W} et celle de \mathcal{W}_L . Montrons comment nous pouvons effectivement obtenir exactement la structure propre dans ce cas. Démarrons du système d'équations linéarisées :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \int_I W(x,y) D_u(u(t,y) - u(t,x)) dy + \partial_u f(u_0, v_0) u(t,x) + \partial_v f(u_0, v_0) v(t,x) \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= \int_I W_L(x,y) D_v(v(t,y) - v(t,x)) dy + \partial_u g(u_0, v_0) u(t,x) + \partial_v g(u_0, v_0) v(t,x) \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire $\int_0^1 W(x,y)(u(y) - u(x)) dy$ via une transformée de Fourier. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^1 W(x,y)(u(y) - u(x)) dy &= \int_0^1 W(x-y)(u(y) - u(x)) dy, \\ &\quad \text{car graphon invariant sous translation} \\ &= \int_0^1 W(x-y)u(y) dy - \int_0^1 W(x-y)u(x) dy \\ &= W * u - \int_0^1 W(x-y)u(x) dy, \\ &\quad \text{par définition de la convolution} \\ &= W * u - u(x) \int_0^1 W(y) dy, \\ &\quad \text{car graphon invariant sous translation et de période 1} \\ &= W * u - u(x) \int_0^1 W(y) e^{2\pi i 0 y} dy \\ &= W * u - u(x) \hat{W}(0) \\ &\quad \text{par définition du coefficient de Fourier} \\ &\quad \hat{W}_m = \int_0^1 W(y) e^{2\pi i m y} dy \end{aligned}$$

D'où, le système devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= D_u(W * u - u(x)\hat{W}(0)) + \partial_u f(u_0, v_0) u(t,x) + \partial_v f(u_0, v_0) v(t,x) \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= D_v(W * v - v(x)\hat{W}(0)) + \partial_u g(u_0, v_0) u(t,x) + \partial_v g(u_0, v_0) v(t,x) \end{cases}.$$

Prenons la transformée de Fourier de ce système. Nous avons, en utilisant les différentes propriétés de cette transformée,

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}_m}{dt} = D_u(\hat{W}_m\hat{u}_m - \hat{u}_m\hat{W}_0) + \partial_u f(u_0, v_0)\hat{u}_m + \partial_v f(u_0, v_0)\hat{v}_m \\ \frac{d\hat{v}_m}{dt} = D_v(\hat{W}_m\hat{v}_m - \hat{v}_m\hat{W}_0) + \partial_u g(u_0, v_0)\hat{u}_m + \partial_v g(u_0, v_0)\hat{v}_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{u}_m \\ \hat{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_u(\hat{W}_m - \hat{W}_0) + \partial_u f(u_0, v_0) & \partial_v f(u_0, v_0) \\ \partial_u g(u_0, v_0) & D_v(\hat{W}_m - \hat{W}_0) + \partial_v g(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_m \\ \hat{v}_m \end{pmatrix}.$$

Cette matrice sera nommée A_w pour la suite de ce mémoire et pour raisons de simplicité d'écriture, nous posons $\partial_u f(u_0, v_0) = \tilde{f}_u$ pour signifier que c'est la dérivée de f par rapport à u et évaluée au point d'équilibre. De façon parallèle pour les trois autres termes, nous avons que la matrice A_w est réécrite comme

$$\begin{pmatrix} D_u(\hat{W}_m - \hat{W}_0) + \tilde{f}_u & \tilde{f}_v \\ \tilde{g}_u & D_v(\hat{W}_m - \hat{W}_0) + \tilde{g}_v \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Nous remarquons assez trivialement que la stabilité de la réaction-diffusion est totalement déterminée par les valeurs propres de A_w . En effet, par l'égalité de Parseval [Med14b], nous savons qu'il n'est pas nécessaire de se ramener au système initial, que la stabilité du système défini à l'équation (3.34) est équivalente à la stabilité de l'EDP (3.2). Sous quelle condition sur les paramètres l'équilibre est-il stable, c'est-à-dire que la dynamique ne possède pas d'instabilité de Turing? Nous discutons cela en fonction de la valeur de m .

Si $m = 0$, la matrice A_w devient $\begin{pmatrix} \tilde{f}_u & \tilde{f}_v \\ \tilde{g}_u & \tilde{g}_v \end{pmatrix}$, la matrice Jacobienne de la partie réaction de la dynamique. Or, par définition, lorsque nous travaillons avec une instabilité de Turing, nous forçons que la partie réaction soit stable. Si $m = 0$, l'équilibre est donc stable.

Si $m \neq 0$, calculons les valeurs propres de A_w .

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - \lambda(\tilde{f}_u + \tilde{g}_v + (D_u + D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0)) - \tilde{g}_u\tilde{f}_v + \tilde{f}_u\tilde{g}_v + D_u D_v (\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2 \\ & + \tilde{f}_u D_v (\hat{W}_m - \hat{W}_0) + \tilde{g}_v D_u (\hat{W}_m - \hat{W}_0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \rho = \tilde{f}_u^2 + \tilde{g}_v^2 + \underline{(D_u + D_v)^2 (\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2} + \underline{2\tilde{f}_u\tilde{g}_v} + \underline{2(\tilde{f}_u + \tilde{g}_v)(D_u + D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0)} \\ & + 4\tilde{g}_u\tilde{f}_v - \underline{4\tilde{f}_u\tilde{g}_v} - \underline{4D_u D_v (\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2} - \underline{4(\tilde{f}_u D_v + \tilde{g}_v D_u)(\hat{W}_m - \hat{W}_0)} \\ \Leftrightarrow \quad & \rho = (\tilde{f}_u - \tilde{g}_v)^2 + (D_u - D_v)^2 (\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2 + 2(\tilde{f}_u - \tilde{g}_v)(D_u - D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0) + 4\tilde{f}_v\tilde{g}_u \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{\rho} = \sqrt{[(\tilde{f}_u - \tilde{g}_v) + (D_u - D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0)]^2 + 4\tilde{f}_v\tilde{g}_u} \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont alors :

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tilde{f}_u + \tilde{g}_v + (D_u + D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0) \pm \sqrt{\rho}}{2}.$$

Dans le cas où ρ est négatif, la discussion se limite à :

$$\text{Le point d'équilibre est stable} \Leftrightarrow \tilde{f}_u + \tilde{g}_v + (D_u + D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0) < 0.$$

Dans le cas du graphon (3.31) avec $p = 0$, le point d'équilibre est effectivement stable puisque les parties réelles des valeurs propres sont négatives. En effet,

- $\tilde{f}_u + \tilde{g}_v < 0$ car c'est la trace de la matrice jacobienne de la réaction qui est égale à la somme des valeurs propres de cette matrice. Or, la réaction est stable d'où les deux valeurs propres sont négatives, de même que pour la somme.
- $D_u + D_v > 0$ car ce sont des coefficients de diffusion, donc positifs.
- $\hat{W}_m - \hat{W}_0 < 0$ par calcul. En effet,

$$\begin{aligned}
\hat{W}_m - \hat{W}_0 &= \int_0^1 W(x) e^{2\pi i m x} dx - \int_0^1 W(x) dx \\
&= \int_0^{1/8} e^{2\pi i m x} dx + \int_{7/8}^1 e^{2\pi i m x} dx - \frac{1}{4} \\
&= \frac{e^{\pi i m/4} - 1}{2\pi i m} + \frac{1 - e^{2\pi i m 7/4}}{2\pi i m} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{\cos(\frac{\pi m}{4}) + i \sin(\frac{\pi m}{4}) - \cos(\frac{-\pi m}{4}) - i \sin(\frac{-\pi m}{4})}{2\pi i m} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{\sin(\frac{\pi m}{4})}{\pi m} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

1. Si $m = 0$, alors cette différence est trivialement nulle.
2. Si $m = 1$, alors nous avons $\hat{W}_m - \hat{W}_0 = \frac{2\sqrt{2}-\pi}{4\pi} < 0$.
3. Si $m \geq 2$ ou $m \leq -2$, $\hat{W}_m - \hat{W}_0 = \frac{4 \sin(\frac{\pi m}{4}) - \pi m}{4\pi m} < \frac{4-m\pi}{4m\pi} < 0$.
4. Si $m = -1$, alors $\hat{W}_m - \hat{W}_0 = \frac{-2\sqrt{2}+\pi}{-4\pi} < 0$.

Si ρ est positif ou nul, nous devons uniquement vérifier que λ_+ est négatif puisque λ_- l'est trivialement.

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_u + \tilde{g}_v + (D_u + D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0) + \sqrt{[(\tilde{f}_u - \tilde{g}_v) + (D_u - D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0)]^2 + 4\tilde{f}_v\tilde{g}_u} < 0 \\
&\Leftrightarrow (\tilde{f}_u + \tilde{g}_v)^2 + (D_u + D_v)^2(\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2 + 2(\tilde{f}_u + \tilde{g}_v)(D_u + D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0) \\
&\quad > [(\tilde{f}_u - \tilde{g}_v) + (D_u - D_v)(\hat{W}_m - \hat{W}_0)]^2 + 4\tilde{f}_v\tilde{g}_u \\
&\Leftrightarrow \tilde{f}_u\tilde{g}_v + D_u D_v (\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2 + (\tilde{f}_u D_v + \tilde{g}_v D_u)(\hat{W}_m - \hat{W}_0) - \tilde{f}_v\tilde{g}_u > 0.
\end{aligned}$$

Nous sommes en présence d'une inéquation du second degré en $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$ et cette inégalité est vérifiée si et seulement si le réalisant est négatif (étant donné que le coefficient du terme en $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)^2$ est positif).

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\tilde{f}_u D_v + \tilde{g}_v D_u)^2 - 4D_u D_v (\tilde{f}_u \tilde{g}_v - \tilde{f}_v \tilde{g}_u) < 0 \\
&= (\tilde{f}_u D_v - \tilde{g}_v D_u)^2 + 4D_u D_v \tilde{g}_u \tilde{f}_v < 0
\end{aligned}$$

C'est donc cette condition que nous utilisons pour vérifier si nous sommes en présence d'une instabilité dans le cas du graphon (3.31). La réaction du Brusselator donne comme Jacobienne

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

et les D_u et D_v ont été choisis comme 0.07 et 5 respectivement.

D'où,

$$(15 + 0.42)^2 + 1.4(-24) = 204.1764 > 0,$$

nous pouvons donc dire que nous avons potentiellement une instabilité de Turing avec le graphon (3.31).

Nous pouvons de manière assez aisée faire le parallèle avec l'étude de stabilité dans le cas de la dynamique sur graphe. Le mémoire [Pla14], l'ayant montré de façon complète (pages 71 à 74), nous ne reprenons que les éléments importants. Nous sommes donc en présence de la dynamique

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = D_u Lu + f(u_i, v_i) \\ \frac{dv_i}{dt} = D_v Lv + g(u_i, v_i) \end{cases}$$

Nous nous plaçons dans le voisinage de l'équilibre et nous linéarisons pour obtenir

$$\begin{cases} \frac{d\delta u_i}{dt} = D_u L \delta u + \partial_{u_i} f(u_i^*, v_i^*) \delta u_i + \partial_{v_i} f(u_i^*, v_i^*) \delta v_i \\ \frac{d\delta v_i}{dt} = D_v L \delta v + \partial_{u_i} g(u_i^*, v_i^*) \delta u_i + \partial_{v_i} g(u_i^*, v_i^*) \delta v_i \end{cases}$$

En écrivant cette perturbation comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice L dont les valeurs propres sont $\{\Lambda_i\}$, nous obtenons

$$\lambda_\alpha \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{u_\alpha} f(u_\alpha^*, v_\alpha^*) + D_u \Lambda_\alpha & \partial_{v_\alpha} f(u_\alpha^*, v_\alpha^*) \\ \partial_{u_\alpha} g(u_\alpha^*, v_\alpha^*) & \partial_{v_\alpha} g(u_\alpha^*, v_\alpha^*) + D_v \Lambda_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Nous remarquons ainsi que le terme $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$ défini via le graphon est le parallèle des valeurs propres de la matrice laplacienne. Nous avons à nouveau la confirmation que les deux dynamiques sont comparables, avec le graphon qui joue le rôle de la matrice laplacienne dans la dynamique de l'EDP (3.2).

De chaque valeur propre Λ_α , nous pouvons en déduire deux valeurs de λ , valeurs propres de la matrice perturbée (3.35). En ne conservant que celle ayant la partie réelle la plus grande $\lambda_\alpha^{m,r}$, nous pouvons construire ce qui est appelée la relation de dispersion. Il s'agit d'afficher pour chaque valeur propre Λ_α la valeur $\lambda_\alpha^{m,r}$ correspondante. Pour des raisons de clarté, nous prenons en abscisses non pas les valeurs propres Λ_α qui sont toutes négatives mais $-\Lambda_\alpha$. Les $\lambda_\alpha^{m,r}$ nous permettent de savoir si la dynamique admet une instabilité de Turing. En effet, si une des valeurs $\lambda_\alpha^{m,r}$ est positive, cela signifie que la matrice perturbée est instable et que, par conséquent, l'équilibre est instable. Cette analyse s'applique également sur un graphon en affichant, pour chaque valeur entière prise par m dans $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$, la partie réelle maximale des valeurs propres de A_w venant de l'équation (3.34). La relation de dispersion peut être réalisée avec un réseau construit avec WS. Prenons pour cela le graphon (3.31) et comparons les relations de dispersion lorsque p vaut 0 et 0.6. De façon intuitive, comme présenté lors des exemples de ce chapitre, nous avons vu qu'avec $p = 0$, l'équilibre semblait stable. Lorsque nous affichons la partie réelle la plus grande des valeurs propres de A_w en fonction des valeurs de $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$, nous avons la figure 3.72. Cette figure nous confirme bien que la matrice A_w est stable puisqu'aucun point ne se trouve au dessus de l'axe des abscisses. Avec la même méthode, pour $p = 0.6$, nous obtenons la figure 3.73 où nous concluons en l'instabilité de l'équilibre.

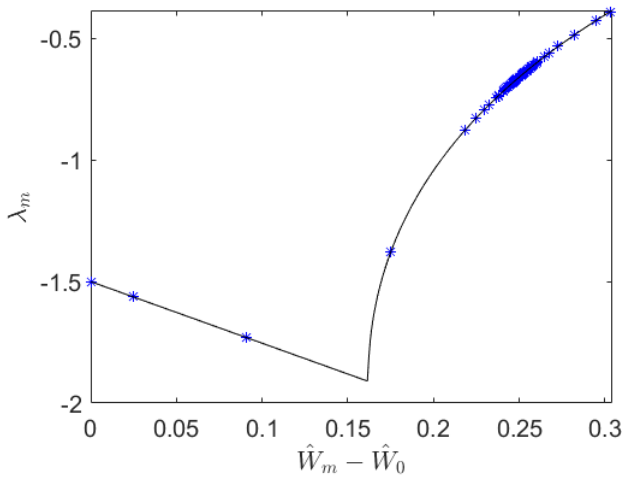


FIGURE 3.72 – Relation de dispersion cas continu (WS $p = 0$)

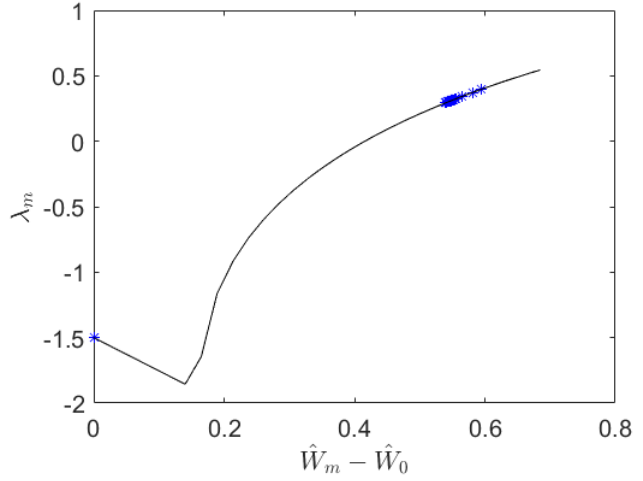


FIGURE 3.73 – Relation de dispersion cas continu (WS $p = 0.6$)

Comparons rapidement les courbes obtenues via les valeurs propres de A_w venant de l'équation (3.34) avec les courbes obtenues en travaillant avec la dynamique sur graphe et les Λ . Nous avons généré les relations de dispersion avec $p = 0$ et $p = 0.6$. Les figures 3.74 et 3.75 sont ces courbes. Nous remarquons qu'à l'exception de l'échelle des abscisses différente, nous avons des comportements très similaires à ceux vus dans les figures 3.72 et 3.73. Cette échelle différente s'explique par le fait que les valeurs propres de L sont de l'ordre du nombre de nœuds tandis que les valeurs de $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$ sont elles beaucoup plus limitées. Cela est dû à la normalisation sur $[0, 1]$, par conséquent à la normalisation de facteur $\frac{1}{n}$, lors du passage au cas continu.

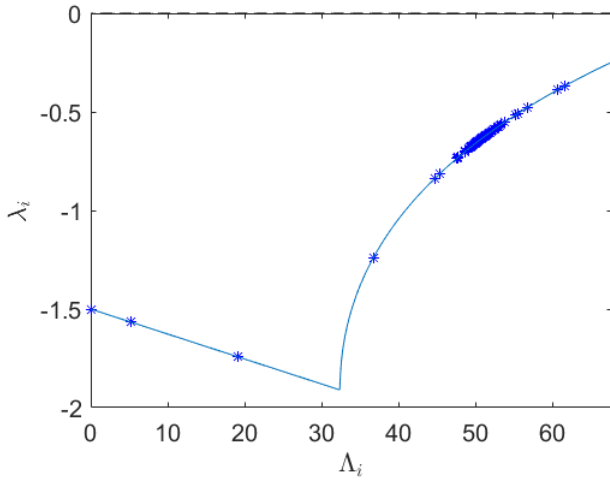


FIGURE 3.74 – Relation de dispersion cas fini (WS $p = 0$)

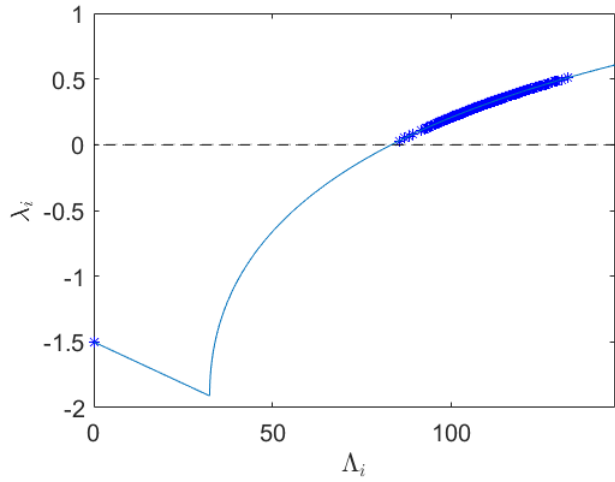


FIGURE 3.75 – Relation de dispersion cas fini (WS $p = 0.6$)

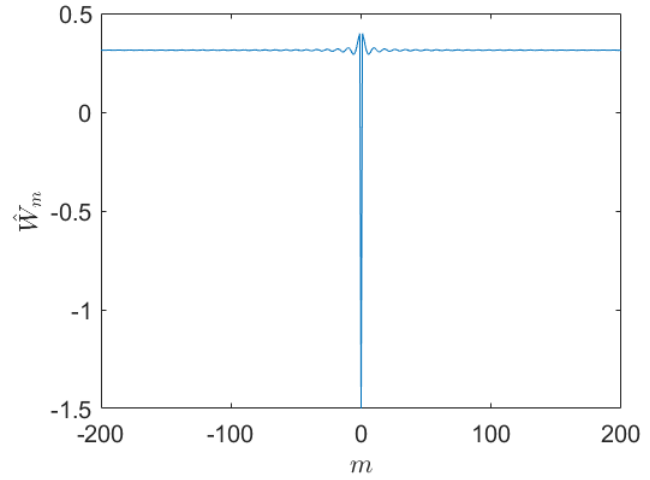
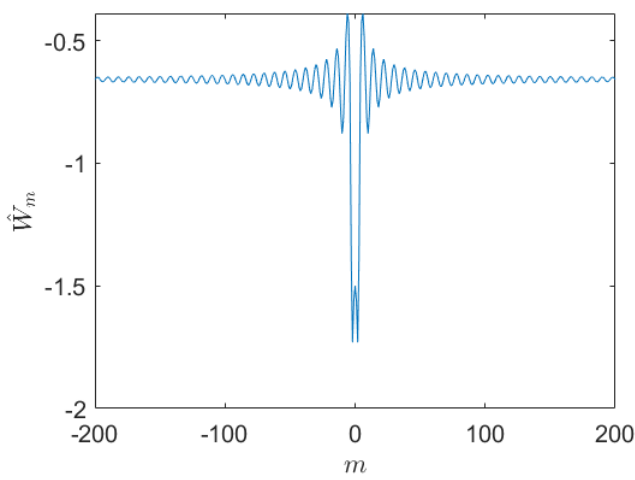


FIGURE 3.76 – Valeur propre max ($p = 0$) FIGURE 3.77 – Valeur propre max ($p = 0.6$)

Enfin, nous pouvons également afficher la valeur propre maximale du système pour chaque valeur de $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$ et nous obtenons les figures 3.76 et 3.77 pour $p = 0$ et $p = 0.6$ respectivement. Nous voyons à nouveau qu'à aucun moment cette courbe passe au-dessus de l'axe des abscisses pour $p = 0$, ce qui veut donc dire que nous sommes stables tandis que dans la figure 3.77, la courbe passe au-dessus de 0 dès que $(\hat{W}_m - \hat{W}_0)$ s'éloigne un peu de 0. Nous avons donc une instabilité pour $p = 0.6$.

Nous voyons ainsi par cette analyse que, lorsque le graphon est invariant par translation et de période 1, nous connaissons exactement le spectre de l'opérateur. Nous pouvons ainsi l'afficher et déterminer la stabilité.

Dans le cas d'un graphon ne respectant pas ces hypothèses, il est néanmoins possible, non pas de déterminer le spectre exactement et d'induire la stabilité de la dynamique, mais de connaître l'intervalle dans lequel se situe ce spectre et donc de pouvoir conclure sur la stabilité si cet intervalle est dans \mathbb{R}^- ou dans \mathbb{R}^+ . En effet, si l'intervalle appartient à \mathbb{R}^- , alors tout le spectre est négatif et l'équilibre est stable. Dans le cas où l'intervalle est dans \mathbb{R}^+ , alors l'équilibre est instable. Prenons comme exemple le graphon (3.30) et montrons la démarche qui nous permet de conclure sur la stabilité. Ce raisonnement utilise bon nombre de résultats d'analyse fonctionnelle venant de [RS80] et [RS78]. Commençons par définir différents spectres valables pour un opérateur.

Définitions - spectres

1. λ est dans le spectre essentiel de A , noté par $\sigma_{\text{ess}}(A)$, si et seulement si pour tout ϵ positif, la projection spectrale de A sur l'intervalle $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$ est de dimension infinie. En d'autres termes, si $\chi_{[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]}(A)$ est de dimension infinie, alors λ est dans le spectre essentiel.
2. λ appartient au spectre discret de A , noté $\sigma_{\text{disc}}(A)$, si pour un $\epsilon > 0$, cette projection spectrale est de dimension finie. Le spectre discret se résume en d'autres termes aux valeurs propres isolées de multiplicité finie.

Une deuxième façon de voir le spectre essentiel vient de la définition de spectre suivante [HS96].

Définition - spectre

Un nombre λ est dans le spectre d'un opérateur T si et seulement si il existe une suite s_k telle que $\|s_k\| = 1 \ \forall k$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ts_k - \lambda s_k\| = 0. \quad (3.36)$$

De cette définition, nous pouvons présenter le spectre essentiel comme l'ensemble des λ tel qu'il existe une suite vérifiant la condition (3.36) mais qui ne contient aucune sous-suite convergente [HS96].

Démarrons l'étude de stabilité. Tout d'abord, mentionnons que, bien que l'opérateur \mathcal{W}_L ne soit pas compact, il est borné et auto-adjoint. Nous pouvons donc utiliser le corollaire 3.6.1 [RS80].

Théorème 3.6.1. *Soit A un opérateur borné et auto-adjoint sur un espace d'Hilbert séparable H . Alors, il existe une mesure finie $\langle M, \mu \rangle$, une fonction F définie sur M et un opérateur unitaire U tel que*

$$U : H \rightarrow L^2(M, d\mu)$$

et

$$UAU^{-1}f(m) = F(m)f(m) \forall f.$$

Cet opérateur U permet de diagonaliser l'opérateur A . Dans notre cas, nous avons

$$U\mathcal{W}_L U^{-1} = D_F,$$

où D_F est un opérateur de multiplication diagonal lié à F .

Soit $f(x, t)$ une fonction telle que nous devons résoudre

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \mathcal{W}_L f(x, t).$$

Si nous définissons $f(x, t)$ comme égal à $U^{-1}z(m, t)$, nous obtenons

$$\frac{\partial U^{-1}z}{\partial t} = \mathcal{W}_L U^{-1}z.$$

En multipliant les deux côtés par U et en commutant U et la dérivée partielle, nous avons

$$\frac{\partial U U^{-1}z(m, t)}{\partial t} = U \mathcal{W}_L U^{-1}z(m, t).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z(m, t)}{\partial t} = F(m)z(m, t).$$

L'équation se résout comme

$$z(m, t) = e^{F(m)t} z(m, 0),$$

ce qui veut dire que la stabilité du système dépend de $F(m)$. Le but à cette étape est de déterminer l'image de F donc le range de F , noté $\text{ran}(F)$. Or, une proposition de [RS80] égalise le range essentiel de F au spectre de l'opérateur D_F .

Théorème 3.6.2. *Soit F une fonction bornée et à valeurs réelles sur un espace mesuré (M, μ) . Soit également D_F l'opérateur de multiplication lié à F donnée comme*

$$(D_F g)(m) = F(m)g(m) \forall g \in L^2(M, d\mu).$$

Alors $\sigma(D_F) = \text{ess ran}(F)$.

Il s'agit maintenant de déterminer le spectre de D_F . Ce spectre coïncide avec celui de \mathcal{W}_L étant donné que D_F est la diagonalisation de \mathcal{W}_L . Le spectre d'un opérateur par définition est l'union de son spectre discret et de son spectre essentiel. En prenant l'exemple du graphon (3.30), nous pouvons montrer que le spectre discret de l'opérateur associé ne possède aucune valeur propre pouvant appartenir au spectre discret. Par conséquent, le spectre se réduit au spectre essentiel. Or, le théorème suivant, appelé le théorème de Weyl [RS78], nous permet de nous ramener à un cas plus simple.

Théorème 3.6.3. *Si A est un opérateur borné auto-adjoint. Alors, pour tout C opérateur compact, on a*

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A + C).$$

En effet, nous savons que \mathcal{W}_L peut s'écrire comme $\mathcal{W} - \mathcal{D}$ où \mathcal{D} est l'opérateur de multiplication lié à la fonction de degrés $k(x)$. D'où, en prenant A comme étant \mathcal{W}_L et C comme \mathcal{W} , nous appliquons Weyl et nous obtenons que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{W}_L) = -\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{D})$. Remarquons que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{D})$ puisqu'à nouveau, le spectre discret est vide pour cet opérateur. En appliquant à nouveau le théorème 3.6.2 avec \mathcal{D} lié à la fonction $k(x)$, nous avons que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{D}) = \text{ess ran}(k)$.

En mettant toutes ces égalités ensemble, nous obtenons

$$\text{ess ran}(F) = \sigma(\mathcal{W}_L) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{W}_L) = -\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{D}) = -\sigma(\mathcal{D}) = -\text{ess ran}(k) = -\text{ran}(k). \quad (3.37)$$

Reprenons le graphon (3.30) et montrons que l'équilibre est instable en utilisant la méthode décrite juste avant.

Exemple 3.6.1. *La fonction $k(x)$ dans le cas du graphon (3.30) vaut*

$$\int_0^1 (1 - xy) dy = \int_0^1 dy - x \int_0^1 y dy = 1 - x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{x}{2}.$$

Tout d'abord, montrons que le spectre discret de \mathcal{W}_L est effectivement vide. Pour connaître les éventuelles valeurs propres, il faut résoudre

$$\frac{d^k}{dx^k} \int_0^1 (1 - xy)(\phi(y) - \phi(x)) dy = \lambda \frac{d^k}{dx^k} \phi(x).$$

Avec $k = 0$, nous obtenons

$$\int_0^1 \phi(y)dy - \phi(x) - x \int_0^1 y\phi(y)dy + x\phi(x)\frac{1}{2} = \lambda\phi(x).$$

Une première condition initiale est obtenue en prenant $x = 0$. Cela donne

$$(\lambda + 1)\phi(0) = \int_0^1 \phi(y)dy. \quad (3.38)$$

Dérivons une première fois, nous avons, après réorganisation des termes

$$(\lambda + 1 - \frac{x}{2})\phi'(x) - \frac{\phi(x)}{2} = - \int_0^1 y\phi(y)dy.$$

Nous pouvons ainsi en extraire une seconde condition initiale qui s'exprime comme

$$(\lambda + 1)\phi'(0) - \frac{\phi(0)}{2} = - \int_0^1 y\phi(y)dy. \quad (3.39)$$

Dérivons une seconde fois, nous obtenons

$$(\lambda + 1 - \frac{x}{2})\phi''(x) - \phi'(x) = 0.$$

Cette équation différentielle est du second ordre. Cependant, en substituant $\phi'(x)$ par une fonction $\psi(x)$, et en résolvant l'équation différentielle du premier ordre correspondante, nous obtenons comme solution pour la variable initiale ϕ

$$\phi(x) = \frac{2K}{\lambda + 1 - \frac{x}{2}}. \quad (3.40)$$

Nous faisons face à deux cas de figure :

1. $\lambda = -1$. Alors, $\phi(x) = \frac{-4K}{x}$. Remarquons que cette fonction n'est pas définie en 0. Il n'est dès lors pas possible que cette fonction soit une fonction propre.
2. $\lambda \neq -1$. Alors, nous devons résoudre les deux conditions initiales pour trouver les λ qui fonctionnent et les fonctions propres qui y correspondraient. La condition initiale (3.38), lorsque nous lui injectons la solution (3.40), donne

$$\ln\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

La condition initiale (3.39) quant à elle donne

$$1 + 2(\lambda + 1) \ln\left(\frac{\lambda + \frac{1}{2}}{\lambda + 1}\right) = 0.$$

En mettant ces deux équations ensemble nous avons $\lambda = \frac{\frac{\sqrt{e}}{2}-1}{1-\sqrt{e}}$ et $\lambda = 0$, ce qui est incompatible. Dès lors que $K \neq 0$, il n'y a pas de valeur propre qui vérifierait les deux conditions initiales à la fois.

En résumé, nous n'avons aucune valeur propre. Par conséquent, le spectre discret est vide.

Toutes les égalités (3.37) peuvent ainsi être utilisées et nous avons que $\text{ess ran}(F) = -\text{ran}\left(\left[1 - \frac{x}{2}\right]_0^1\right) = [-1, -\frac{1}{2}]$. Afin de déterminer la stabilité de la réaction-diffusion via le graphon (3.30), nous pouvons réaliser une relation de dispersion avec la matrice

$$\begin{pmatrix} f_u + D_u F(m) & f_v \\ g_u & g_v + F(m)D_v \end{pmatrix}$$

en remplaçant $F(m)$ par l'intervalle $[-1, -\frac{1}{2}]$. Nous ne connaissons pas les valeurs exactes que prend la fonction F mais nous pouvons quand même connaître la stabilité de cette matrice. La figure 3.78 nous donne la relation de dispersion. Nous voyons que l'équilibre est instable puisque les valeurs propres sont positives sur tout l'intervalle, instabilité déjà remarquée dans les exemples. La relation de dispersion dans le cas fini est montrée à la figure 3.79. L'instabilité de l'équilibre est de nouveau mise en lumière. Si nous superposons les deux courbes, en ayant préalablement normalisé par $\frac{1}{n}$ pour la relation de dispersion liée à L , nous avons la figure 3.80 qui montre bien que les deux intervalles de valeurs propres coïncident.

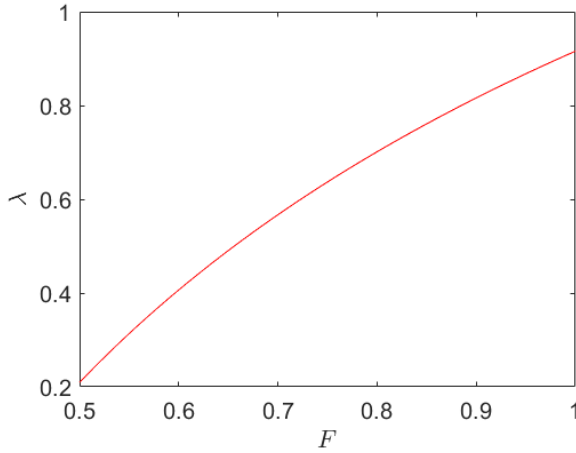


FIGURE 3.78 – Relation de dispersion \mathcal{W}_L (graphon (3.30))

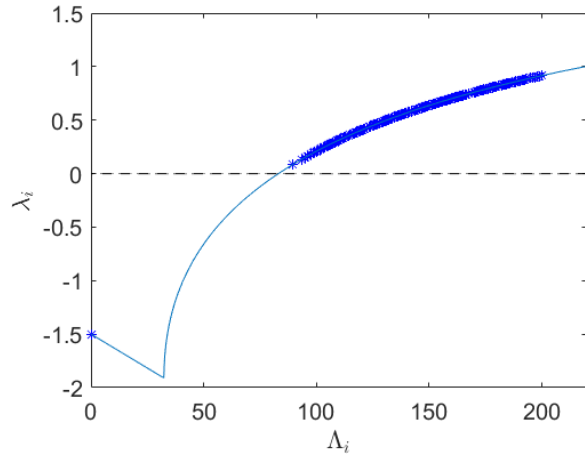


FIGURE 3.79 – Relation de dispersion L (graphon (3.30))

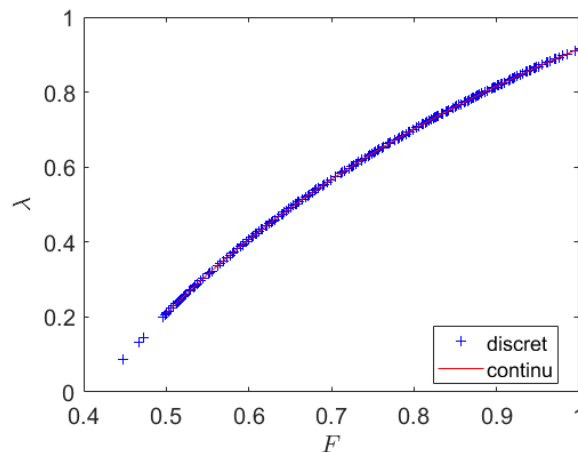


FIGURE 3.80 – Comparaison des relations de dispersion (graphon (3.30))

Chapitre 4

Perspectives

Nous présentons dans ce chapitre les idées de perspectives et les intérêts qui nous sont venus à l'esprit. Le premier point concerne un type de graphe, dit spatial c'est-à-dire qui est immergé dans \mathbb{R}^2 , qui possède beaucoup d'intérêts en pratique mais dont le graphon est fractal (figure 4.1) [Med14a]. La solution serait de ne plus définir le graphon comme une fonction sur $[0, 1] \times [0, 1]$ mais de prendre $[0, 1]^2 \times [0, 1]^2$. Nos codes ne se généralisant pas facilement à une extension de ce type, nous nous contentons de présenter un graphe spatial, de présenter les applications possibles et comment se construit le graphon fractal.

En second lieu, nous reparlons de la question de la régularité des solutions, nous en avons eu l'intuition dans les exemples du chapitre précédent, mais une étude théorique nous semble très intéressante à réaliser et pourrait permettre d'aboutir à une bien meilleure prédiction de la forme des motifs.

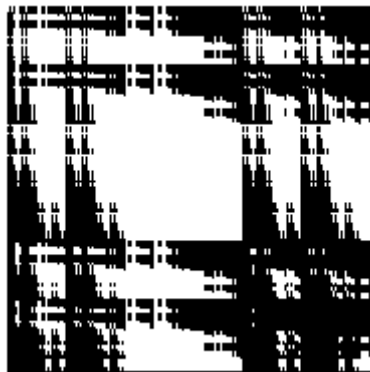


FIGURE 4.1 – Graphon fractal d'un réseau spatial

4.1 Graphon construit depuis un "graphe spatial"

Cette section a été construite plus dans une optique d'application future. Nous n'avons cependant pas eu l'occasion de la mettre en pratique. Le réseau considéré peut être vu comme un réseau physique, spatial, dans le sens que les nœuds représenteraient des positions dans un espace à deux dimensions, que nous prenons pour raisons de simplicité comme le plan $[0, 1]^2$. Les liens sont alors les interactions entre ces coordonnées. Deux lieux sont connectés si leur distance, que nous prenons euclidienne, est inférieure à une certaine valeur m . La difficulté principale rencontrée a été la faculté de faire correspondre un point de $[0, 1]^2$ à un réel entre 0 et 1. En effet, la fonction W ne prend que deux réels en arguments et ces deux réels doivent correspondre à deux points du plan puisque $W(x, y)$ nous donne une information sur l'interaction entre x et y , deux entités de l'espace. Nous avons ainsi utilisé la bijection entre $[0, 1[$ et $[0, 1]^2$ définie comme

$$B : \begin{array}{ll} [0, 1[& \rightarrow [0, 1]^2 \\ x = 0.abcdefgh & \rightsquigarrow y = (0.aceg; 0.bdfh) \end{array}$$

et présentée dans [DS] et [Ros04]. Autrement dit, nous considérons les décimales du nombre x réel entre 0 et 1 et nous construisons deux réels dans le même intervalle formant le couple y en alternant les décimales de x dans y_1 et y_2 . Le problème avec cette bijection est que le graphon qui en résultera sera, comme mentionné juste avant, fractal. En effet, toute notion de distance entre deux points d'un plan ne peut s'y retrouver dans le graphon où deux points proches ne le seront pas nécessairement spatialement. Une autre possibilité de graphon serait de garder les coordonnées de chaque point et de construire alors un graphon $W : [0, 1]^2 \times [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.

Les avantages qui nous viennent en tête seraient la capacité de représenter un espace constitué par exemple de villes et de routes, auxquels nous pouvons même ajouter des contraintes telles que des cours d'eau (ce qui augmente la probabilité qu'une ville soit construite aux abords) et du dénivelé qui influencera aussi comment les villes et les routes sont ajoutées. Dès le moment où ces contraintes sont définies, nous pouvons alors construire un réseau et en connaissant le graphon qui y correspond, nous pouvons étudier l'évolution de la démographie dans ces villes, ou l'impact d'une route fermée ou encore la ville qui naturellement s'apparentera à la capitale si une majorité des échanges commerciaux passent par une ville en particulier. La mobilité pourrait ainsi être étudiée du point de vue graphon et peut-être en ressortira des informations intéressantes.

4.2 Régularité des solutions

Comme mentionné lors de la présentation des exemples, nous avons pu arriver à l'idée que toute propriété de régularité de la condition initiale semblait se transmettre pendant l'intégration. Par conséquent, la solution paraît être du même type que la condition initiale. Nous serions très intéressés à connaître le fin mot de cette intuition. Cela apporterait en effet une information très intéressante sur les motifs, leur forme, leur graduation et leur répartition. Si nous considérons les deux espèces comme des densités de deux couleurs, avons-nous des nuances de couleur ou bien deux couleurs très différentes en coexistence ?

Conclusion

L'utilisation de réseaux pour répondre à des problématiques réelles a toujours été conséquente. En effet, bon nombre de systèmes étudiés peuvent être modélisés par un réseau sur lequel nous pouvons y ajouter une dynamique de réseau rendant compte de la dynamique réelle du système étudié. L'augmentation des capacités technologiques et de la complexité du processus analysé ont entraîné des réseaux de plus en plus grands. Ces grands réseaux ont besoin d'une mémoire importante et de technologies puissantes afin d'étudier leur dynamique de réseau ou leur structure. L'article [BCL⁺11] est le premier à présenter une alternative, appelée graphon ou graphe limite, à l'étude de grands graphes. Cette nouvelle théorie s'est avérée être très prolifique, ce qui a amené une grande communauté de scientifiques à approfondir le domaine.

Dans ce mémoire, nous nous sommes placés dans le cadre des dynamiques sur réseau de type réaction-diffusion. Nous avons commencé par présenter comment et sous quelles conditions se construit un graphon, quelques propriétés et une méthode pour étendre les définitions au cas des graphes creux (le nombre de liens est d'ordre inférieur au carré du nombre de sommets) [BCCZ14]. Nous avons ensuite ajouté de la dynamique au réseau et montré comment la dynamique peut être décrite par le biais d'un graphon. Nous avons présenté le théorème central de ce mémoire qui établit la convergence des solutions sur réseau vers celle via graphon. Étant donné que nous souhaitons être en présence d'une instabilité de Turing [Tur52], système dont l'équilibre stable de la partie réaction devient instable de par l'ajout de la diffusion, nous avons étendu l'énoncé et la démonstration de ce théorème au cas à deux dimensions et avec un terme de réaction puis montré une série d'exemples pour illustrer le théorème. Au-delà du gain de mémoire et de temps d'exécution pour étudier une dynamique sur réseau, le graphon permet également d'analyser la structure et la stabilité des réseaux. Nous avons ainsi présenté comment connaître des éléments importants d'un réseau, tels que la structure propre de sa matrice d'adjacence ou une idée de la distribution des degrés, en travaillant sur l'opérateur graphon construit à partir du graphe limite. Enfin, nous avons présenté deux perspectives immédiates à ce mémoire. La première est l'étude d'un autre type de graphe, appelé graphe spatial et beaucoup utilisé en pratique. La seconde est l'approfondissement concernant la convergence des solutions. En effet, il est sans doute possible d'en dire plus qu'une convergence simple des solutions, nous pourrions sans doute prédire la forme des solutions et par conséquent, comme nous sommes dans le cadre d'une instabilité de Turing, prédire les motifs de Turing.

Nul doute que la théorie des graphes limites a encore des secrets à nous transmettre. Nous présageons que de nouvelles problématiques pourraient être résolues ou complétées par une approche utilisant la théorie des graphons.

Bibliographie

- [AH03] S. Ault and E. Holmgreen. Dynamics of the brusselator. <https://www-dimat.unipv.it/boffi/teaching/download/Brusselator.pdf>, 2003. Université de Pavie.
- [AMPSS17] M. Avella-Medina, F. Parise, M. T. Schaub, and S. Segarra. Centrality measures for graphons. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2017.
- [AMR05] M. Amiel, G. Mélançon, and C. Rozenblat. Réseaux multi-niveaux : l'exemple des échanges aériens mondiaux de passagers. <https://mappemonde-archive.mgm.fr/num7/articles/art05302.html>, 2005.
- [BCCH18] C. Borgs, J. Chayes, H. Cohn, and N. Holden. Sparse exchangeable graphs and their limits via graphon processes. *Journal of Machine Learning Research*, 18 :1–71, 2018.
- [BCCZ14] C. Borgs, J. Chayes, H. Cohn, and Y. Zhao. An l^p theory of sparse graph convergence i : limits, sparse random graph models and power law distributions. preprint ArXiv :1401.2906, 2014.
- [BCL⁺11] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. Sós, and K. Vesztegombi. Limits of randomly grown graphs sequences. *European Journal of Combinatorics*, 32(7) :985–999, 2011.
- [BR09] B. Bollobás and O. Riordan. *Metrics for sparse graphs*, page 211–288. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2009.
- [Deg] Réseaux sociaux, individu social, visibilité et réputation. <https://www.u-cie.com/reseaux-sociaux-visibilite-reputation/>. Accédé : 25/04/19.
- [Des11] C. Deskus. An introduction to the regularity lemma. <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Deskus.pdf>, 2011. University of Chicago.
- [DS] A.-M. Décaillot and J. Sakarovitch. Cantor et la france. <http://culturemath.ens.fr/video/cantor/complements-mathematiques.html>. Accédé : 24/04/19.
- [FV12] B. Fortz and N. Veshchikov. Mise à niveau en algorithmique. <http://student.ulb.ac.be/~nveshchi/docs/rechOp/presentation.pdf>, 2011-2012. ULB, Accédé : 20/05/19.
- [Gep] Gephi. <https://gephi.org/>. Accédé : 20/05/19.
- [Har] A. Hardy. Cours de mesure et intégration. Unamur, année académique 2016-2017.

- [HDZ⁺12] J. Heitzig, J. Donges, Y. Zou, N. Marwan, and J. Kurths. Node-weighted measures for complex networks with spatially embedded, sampled, or differently sized nodes. European Physical Journal B, 85(38), 2012.
- [HS96] P. Hislop and I. Sigal. The essential spectrum : Weyl’s criterion. In Introduction to Spectral Theory, volume 113 of Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 1996.
- [IIM16] Y. Ide, H. Izuhara, and T. Machida. Turing instability in reaction-diffusion models on complex networks. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, 457 :331–347, 2016.
- [INC] Matrice d’adjacence d’un graphe. <http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/adjacencematrice.html>. Accédé : 08/05/18.
- [Iri] Iris du japon - iris ensata illumination. <https://www.promessedefleurs.com/vivaces/vivaces-par-variete/iris/iris-du-japon/iris-du-japon-iris-ensata-illumination.html>. Accédé : 24/04/19.
- [Jia11] R. Jia. Analysis 1 : Chapter 3. differentiable mappings. <https://sites.ualberta.ca/~rjia/Math414/Notes/chap3.pdf>, 2011. Accédé : 23/05/19.
- [KT18] C. Kuehn and S. Thom. Power network dynamics on graphons. preprint ArXiv :1807.03573, 2018.
- [KVM17] D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and G. Medvedev. The semilinear heat equation on sparse random graphs. SIAM J. Math. Anal., 49(2), 2017.
- [Lam] R. Lambiotte. Cours de théorie des graphes. Unamur, année académique 2015-2016.
- [Les13] A. Lesne. Alan turing, les motifs et les structures du vivant. <https://interstices.info/alan-turing-les-motifs-et-les-structures-du-vivant/>, 2013. Accédé : 24/04/19.
- [LS06] L. Lovász and B. Szegedy. Limits of dense graph sequences. Journal of Combinatorial Theory, 96 :933–957, 2006.
- [Med14a] G. Medvedev. The nonlinear heat equation on dense graphs and graphs limits. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 46(4) :2743–2766, 2014.
- [Med14b] G. Medvedev. Small-world networks of kuramoto oscillators. Physica D : Nonlinear Phenomena, 266 :13–22, 2014.
- [MIN] Dimension de minkowski-bouligand. https://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension_de_Minkowski-Bouligand. Accédé : 08/05/18.
- [Muo17] R. Muolo. Effects of nonnormality on turing-like pattern formation, 2016-2017. Phd Thesis.
- [Par] L. Parnowski. Operator theory solution v. <http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahlep/111/e04ot5s.pdf>. Accédé : 06/04/19.
- [Pla14] G. Planchon. Formation de motifs dans les modèles biologiques. Master’s thesis, Unamur, 2014.

- [Ros04] C. Rose. Tipe — les ensembles infinis et la théorie de zermelo-frænkel. <http://www.normalesup.org/~rose/maths/tipe/tipe.pdf>, 2003-2004. Accédé : 24/04/19.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. Vol 4 : Analysis of Operators. Methods of modern mathematical physics. Academic Press, San Diego, 1978.
- [RS80] M. Reed and B. Simon. Vol 1 : Functional Analysis. Methods of modern mathematical physics. Academic Press, San Diego, 1980.
- [Syn] Comprendre le cerveau. <http://www.linternaute.com/science/biologie/dossiers/06/0602-cerveau/5.shtml>. Accédé : 19/05/19.
- [Tur52] A. Turing. The chemical basis of morphogenesis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 237 :37–72, 1952.
- [VBMW12] D. Vira, S. Basak, V. Mysore, and M. Wang. Cancer stem cells, micrnas, and therapeutic strategies including natural products. Cancer and metastasis review, 31(3-4) :733–751, 2012. Image, Accédé : 24/04/19.
- [Wat] Watts strogatz model. <https://www.kth.se/social/files/5605669af2765468be471eda/lecture%204%20%282015%29.pdf>. Accédé : 19/04/19.
- [WDHK13] M. Wiedermann, J. Donges, J. Heitzig, and J. Kurths. Node-weighted interacting network measures improve the representation of real-world complex systems. Europhysics Letters, 102, 2013.
- [Zai12] F. Zaidi. Small world networks and clustered small world networks with random connectivity. Social Network Analysis and Mining, 2012.
- [Zeb] Zébrure : définition de zébrure, subst. fém. <https://www.lalanguefrancaise.com/dictionnaire/definition-zebrure/>. Accédé : 24/04/19.